鋼柱・はりの座屈設計および道路橋示方書における座屈安全性規定の復習

京都大学名誉教授　渡邊英一

第 1 章　圧縮部材・はり部材の設計 Design of compression members and beams

1.1　はじめに

最も簡単な圧縮部材は柱（column）である．主として軸方向に圧縮力のみを受けると考えられる部材で，トラス橋の圧縮部材，送電鉄塔などの塔状構造の主部材などに用いられるほか,主構を支える対傾構や横構などの二次部材としても広く用いられている．また，長柱(long column)とは断面の大きさに比較して長さの長い圧縮部材であり，座屈が問題となる．これに反し，長さの短い柱を短柱(short column)と呼ぶ．通常座屈は問題とはならない．その他の部材においても圧縮力を受ける場合があり，例えば桁柱（beam-column），板(plates)，骨組み構造の一部やプレートガーダー（plate girder）の圧縮側フランジ等が挙げられる．

実構造物中の圧縮部材は一般に両端が他の構造に剛結されているため，設計上軸方向力のみ受けると考えられる部材も実際には部材端に二次的な曲げモーメントが生じる．また，施工上の誤差のため構造骨組線と部材軸線とが完全には一致せず，多少とも偏心載荷となる場合がある．

鋼などの金属材料の応力‐ひずみ関係は通常応力を縦軸に，ひずみを横軸にプロットして得られるが，この曲線は一般に引張りと圧縮に対してはひずみ軸である横軸に関しては逆対称であり，引張りに対する降伏応力と圧縮に対する降伏応力は符号こそ逆ではあるが一般には同じ大きさを持つ．ただし，このようなことはある条件下で成立するに過ぎない．

一般に圧縮力が構造物に作用すると，ある大きさの荷重の大きさに達すると突然部材の軸に直角方向の変形が顕著になり，その結果構造物の耐荷力が低下してしまうということが起こる．このような現象を構造物の静的不安定現象(static instability phenomenon）と言う．座屈はその中でも代表的な現象で，このような現象は構造物の材料，寸法，形状，外力の種類などによって異なるものである．構造物が複数の部材からなっている場合は一般に複数の異なる不安定現象が起こる可能性がある．ところで静的不安定現象と対比されるのが動的不安定現象である．話せば長くなるので一言で違いを述べれば，前者が主として圧縮荷重により部材の見かけの剛性が著しく減少することにより部材の変位が不安定的に増大するのに対して，後者は構造物の減衰性が著しく減少することによる不安定現象であり，強風等の作用により部材の振動振幅が不安定的に増大するものである．

構造物の不安定現象に関する研究は 18 世紀前半（1729）に van Musschenbroek によって始められたと言える．彼は柱(図 1)の強度，Pは経験的に以下の式(1)で表せると考えた．

$$P = k\frac{bd^2}{L^2} \tag{1}$$

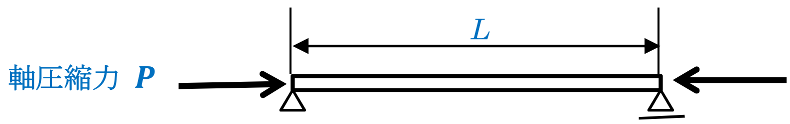


図 1 圧縮を受ける柱

により表せるものと考えた．ここに，k は経験的に求まる定数，b, d は矩形断面のそれぞれ幅と高さ，L は柱の支点間の距離(スパン長)である．

1759 年に Leonhard Euler は柱の座屈に関する論文を発表した．彼は柱の強度もまた，安定性の問題として捉えられるべきものであり，それまで考えられていたような圧壊(crushing)によるものではないと考えた．彼は左端固定で右端自由支持の柱(図 2)を考えると柱の座屈強度 P_{cr} は式(2) により表せるものと考えた．ここに C は材料の弾性的性質に

この年に Berlin Academy 紀要に
投稿： Sur la force des colonnes
柱の力に関して

$$P_{cr} = C\frac{\pi^2}{4L^2} \tag{2}$$

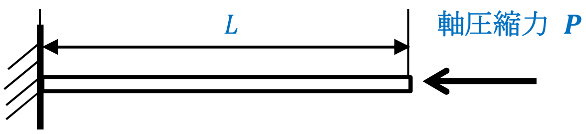


図 2 左端固定で右端自由支持の柱

よって定まる定数である．このように，Euler は柱の純弾性座屈現象のみではあるが，これを初めて学問的に取り扱った．すなわち，彼は柱のどの個所でも応力は弾性限(elastic limit)を超えないと考えた．このような弾性座屈は実際は非常に細長い柱のみにおいてしか起こりえないが Euler の後 100 年以上も経ってやっと非弾性座屈の研究が始まった．

1889 年に Engesser が“tangent modulus theory”を発表したが，この tangent modulus（接線弾性係数）とは応力 - ひずみ曲線における任意の一点の接線勾配であり，非弾性域ではヤング率E の代わりに tangent modulus E_t を用いるべきであると考えた(図 3(a))．また，その後 Considere の予言や Jasinski の批判を受けて “reduced modulus theory” を発表し，そこで除荷という事実を考慮して柱の圧縮側と引張側でそれぞれ，E_t, E という異なった modulus を使うことを提案した．しかし，これは事実を捉えたように見えても実験結果を良く説明できるものではなかった．それに反し，tangent modulus theory は実験結果を良く説明できた．

1947 年に Shanley が”Shanley model”を考えて柱の座屈現象をうまく説明した．その後残留応力，初期不整，荷重の偏心など，いわゆる imperfection の影響を考えた研究がおこなわれるようになり，柱の研究は大きく前進した．

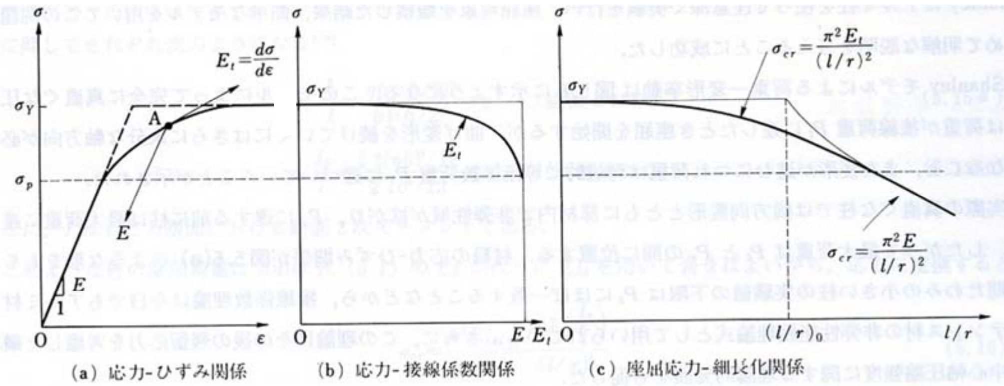


図 3　接線弾性係数(tangent modulus E_t)(福本，1987)

北田俊行大阪市立学名誉教授は座屈理論の発展史を以下のようにまとめている．(北田俊行，2006)

1752（柱）　Leonard Euler の座屈公式

1845（板）　ブリタニヤ橋の建設（箱桁橋，ロバート・スチーブンソン，板の座屈の認識）

1889（柱）　Engessor の接線係数理論（(E→E_t)，実験値とよく合う）

1891（柱）　Bryan による板の座屈応力（エネルギー法による）

1895（柱）　Engessor の等価係数理論（E→E_r）

1904（板）　Wagner による自由突出板のねじり座屈の微分方程式と解

1910（板）　von Karman の有限変位を考慮した板の微分方程式（座屈の微分方程式は Saint-Venant による）

1914（板）　Timoshenko の等価係数理論（E→E_r）

1917（柱）　ケベック橋完成（カナダ，ゲルバートラス，549m，中央スパンの 2 回の落橋事故）

1924（板）　Bleich の接線係数理論（E→E_t）

1925 頃多次元応力状態における塑性理論の発達

・Hencky･Nadai の塑性変形理論

・Prandtl･Reuss の塑性流れ理論

1932（板）　von Karman による板座屈の有効幅

1942（板）　Levy の解（その後，Coan（初期たわみ考慮），八巻（種々の境界条件）の解など）

1947（板）　Ilyushin の塑性変形理論に基づく等価係数理論

1947（板）　Handelman･Prager の塑性流れ理論に基づく等価係数理論

1947（柱）　Schanley の論文（Schanley モデル）（接線係数理論か等価係数理論かという問題の解決）

1948（板） Stowell の塑性変形理論に基づく接線係数理論

1949（板） Bijlaard の塑性変形理論に基づく接線係数理論

1950（板） Pearson の塑性流れ理論に基づく接線係数理論

1953 DIN4114

1953（板） Onat･Drucker による自由突出板のねじり座屈に初期たわみを考慮

1955（板） 山本の板の Schanley モデル（初期たわみの重要性）

1969（板） 上田・Tall の残留応力の考慮

（プレーガーダーの軽量化の研究が活発）

（プレートガーダー腹板の研究が活発）

1968（柱） Schulz の耐荷力曲線（道路橋示方書の柱の耐荷力曲線の原点）

1969（板） New Danube 橋の落橋（11 月，オーストリア）

1970（板） Milford Haven 橋の落橋（6 月，イギリス）

1970（板） West Gate 橋の落橋（10 月，オーストラリア，35 人死亡）

1970（板） Skalaud の補剛板の弾塑性有限変位解析（Skalaud の仮定，柱では Perry･Robertson 公式として有名）

1971（板） Massonnet･Maquoi の補剛板の直交異方性理論による解析

1971（柱） Koblenz 橋の落橋（11 月，ドイツ，13 人死亡，写真 1 枚）

（圧縮補剛板の研究が活発）

（固有値問題としての座屈理論が使われなくなり，初期たわみと残留応力とを考慮する弾塑性有限変位解析が主流となる）

（コンピュータの普及につれて有限要素法が汎用化され始める）

1972（板） 岡村・吉田による板の弾塑性有限変位解析（選点法）

1975（板） 小松・北田・宮崎による板の弾塑性有限変位解析（有限要素法）

1976（板） 上田・安川・矢尾・池上・大南による板の弾塑性有限変位解析（有限要素法）

（コスト縮減から厚肉少補剛断面が採用され始める）

（コスト縮減から，道路橋示方書の適用範囲外の補剛板の研究と採用）

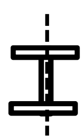
1995 兵庫県南部地震

（薄肉補剛断面部材の変形性能が重要となり，塑性領域，あるいは後座屈領域の繰り返し載荷の解析が必要となる．そのための構成則として，宇佐美，水野，西村，および後藤らのモデルが作成された）

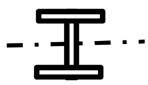
1.2 種々の不安定現象例

- 柱(columns)

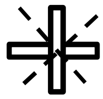
弱軸回りの座屈



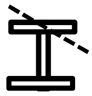
強軸回りの座屈



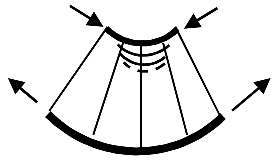
ねじり座屈



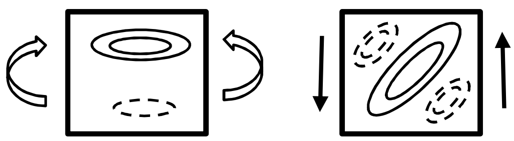
- はり，プレートガーダー　　圧縮フランジのねじり座屈



フランジの大曲率による腹板の垂直座屈（上フランジ直下）

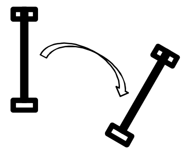


腹板の局部座屈



純曲げを受けるとき　せん断を受けるとき

横ねじれ座屈(Kipping)



- シェル　　各種シェルの座屈，屈服(図はこのテキストでは省略)

1.3　オイラー座屈荷重(Euler Buckling Load)

偏心が無く，残留応力も無いと仮定する．図 4 のように，柱の長さに添って座標軸 x をとり，柱の横方向のたわみを v ，柱の長さをLとする．$P = P_e$ となると下方向にたわみ始める．たわみが生じたときその状態で釣り合い式を書けば式(3)のとおりであり，柱の支持条件は両端でたわみと曲げモーメントは零という仮定を設けている．

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} + Pv = 0 \qquad \text{境界条件：　両端にて} v = 0,\ \frac{d^2v}{dx^2}=0 \tag{3}$$

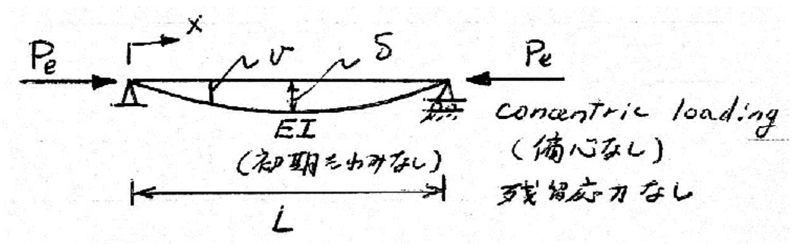


図 4　座屈直後の柱の変形状態

式(3)を固有値問題(境界値問題)として解けば，固有値P_eは以下のように求められる．

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}\text{: オイラーの弾性座屈荷重(Euler Load)} \tag{4}$$

そのときの応力(座屈座屈応力)は以下のように表せる．

$$\sigma_e = \frac{P_e}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{L}{r})^2} \leq \sigma_Y \tag{5}$$

ここに，r は断面の回転半径（$I = \mathrm{A}r^2$）である．なお，L/r は細長比と呼ばれるものであり，σ_eとL/rの関係は図 5 に示されるとおりであり，右下がりの双曲線となる．

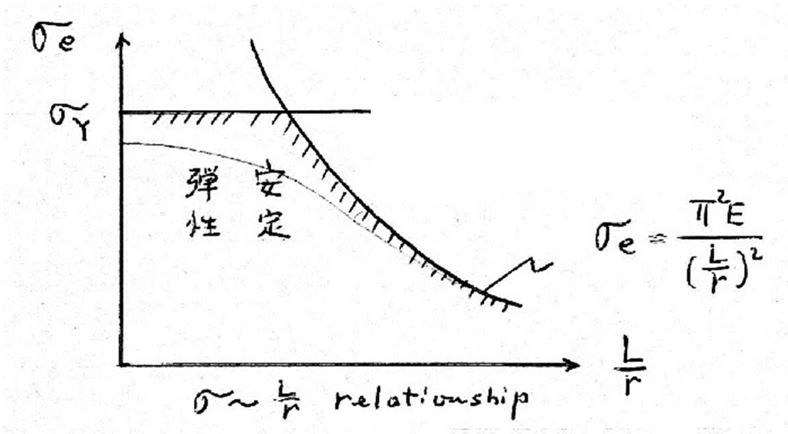


図 5　Euler の座屈曲線(σ_eとL/rの関係)

1.4　接線係数座屈荷重，Tangent Modulus Load (Original Engesser Theory)

Engesser 1889

The column “remains straight up to the moment of failure and the (tangent) modulus of elasticity remains constant right across the cross section. (柱は最終的な座屈の状態に至るまで真っ直ぐであり，接線弾性係数E_tは断面全体において一定の値を持つと仮定)．そうすれば，接線弾性座屈荷重σ_{cr}は図 6 の左下図のように式(6)により表せる．

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E_t}{(\frac{L}{r})^2} = \sigma_e\left(\frac{E_t}{E}\right) \tag{6}$$

座屈にともなる新たな曲げ応力も接線弾性係数がこの図の右上の図の示すとおり，何処でも同じで E_t なので軸圧縮力は座屈しても座屈点付近では図 6 の中央下の図にあるように増減しない．

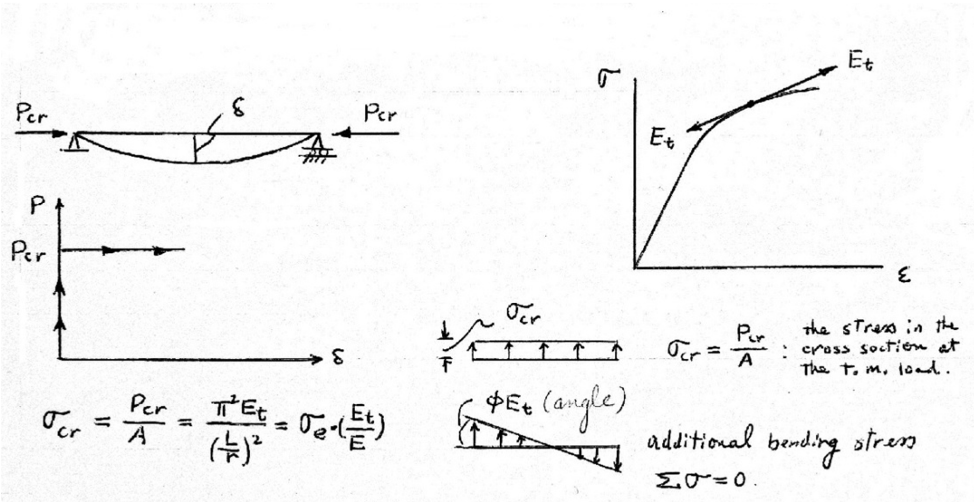


図 6　接線弾性係数E_tのときの座屈(Tangent Modulus Buckling Load)

1.5　等価係数座屈荷重［Reduced Modulus Theory (Double Modulus Theory)］

既に説明したように，Considere の予言や Jasinski の批判を受けて “reduced modulus theory” を発表し，そこで図 7 に示されているように，除荷という事実を考慮して柱の圧縮側と引張側でそれぞれ，E_t，E という異なった modulus を使うことを提案した．

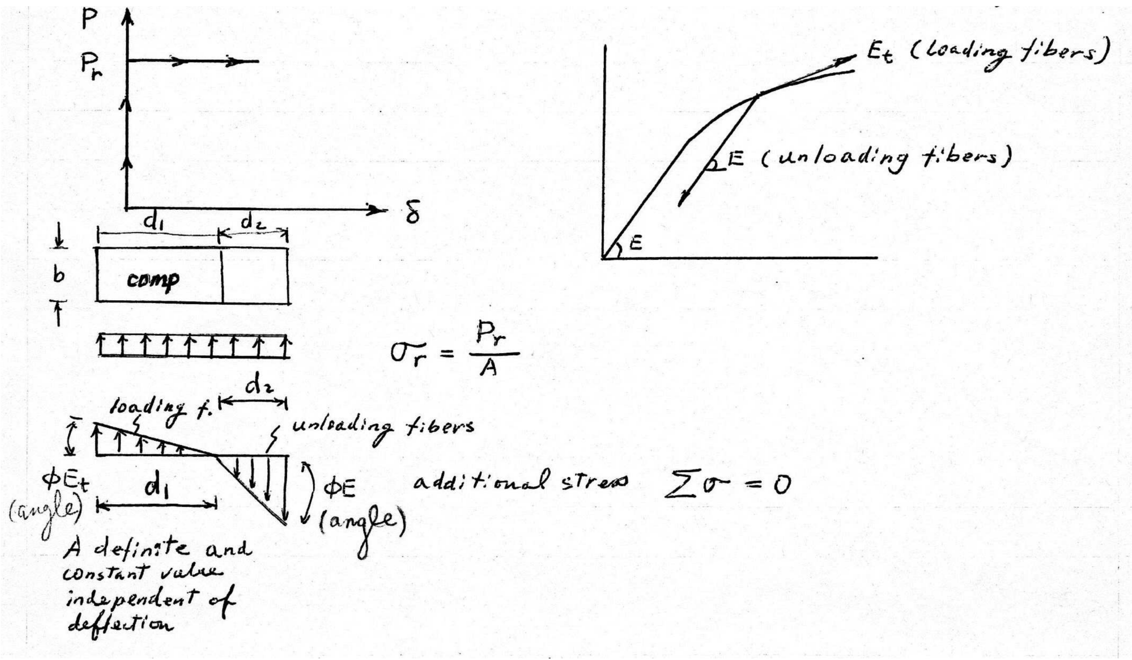


図 7　Reduced Modulus Theory の骨子

すなわち，一様な軸圧縮を受けているとき突然座屈が生じたとすればそこで曲げに伴い，引張と圧縮領域を有する新たな応力成分が追加される．そこで圧縮部分は依然として接線

方向に新たに曲げに伴う応力成分が追加されるが，引張部分は図 7 右上図のように，いわゆる除荷が起こることになる．曲げモーメントを計算すれば今度は以下のように Reduced Modulus（等価弾性係数），E_r が tangent modulus（接線弾性係数）に代わって用いられることになる．ここにd_1は圧縮側の断面の厚さ，d_2は除荷側(引張りが加わる側)の断面の厚さとすると，

$$M = \emptyset E_t d_1 \cdot \frac{bd_1}{2} \cdot \frac{2}{3} d_1 + \emptyset E d_2 \cdot \frac{bd_2}{2} \cdot \frac{2}{3} d_2 = \emptyset E_r I = \emptyset E_r \frac{b(d_1+d_2)^3}{12} \tag{7}$$

ここに，$\int_A \sigma dA = 0$，よって $d_1^2 = \frac{E}{E_t} d_2^2$ であるから E_r は以下のように求まる．

$$E_r = \frac{4E_tE}{(\sqrt{E}+\sqrt{E_t})^2} > \frac{4E_tE}{(\sqrt{E}+\sqrt{E})^2} = E_t \quad \text{よって，} \quad E_t < E_r < E\text{）} \tag{8}$$

したがって，軸応力は以下のように求められる．

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E_r}{(\frac{L}{r})^2} = \frac{\pi^2}{(\frac{L}{r})^2}\left[\frac{4E_tE}{(\sqrt{E}+\sqrt{E_t})^2}\right] = \sigma_e \left[\frac{4E_tE}{(\sqrt{E}+\sqrt{E_t})^2}\right] \tag{9}$$

これはあたかもより厳密な発見と思われたが現実とはかけ離れた結果しかもたらされなかったのはあまりにも有名な歴史的事実である．そのことをうまく説明したのが Shanley であった．

1.6 Shanley Model

確認された一番重要な事実は座屈の瞬間はたわみ始めても除荷は起こらないことである．Shanley は図 8 に示されるような極めて単純なモデルを考え実際の現象を説明しようとした．要点は実際の柱は座屈するとき決して柱の中立軸を中心に曲げ変形が始まるのではなく，柱の縁端を中心に始まるのである．こう考えると断面のどこにも座屈当初は除荷は起こらないことが納得できる．

図 9 は横軸に柱のたわみ，縦軸に圧縮荷重の大きさをとって座屈荷重の開始点と接線係数荷重および等価係数荷重の関係を示したものであるが，結論的に座屈の開始点は決して等価係数荷重ではなく，接線係数荷重であること，そして実際の耐荷力はこの両者の中間ぐらいに収まるのである．この事実から，接線係数座屈荷重は非弾性の座屈を考えるとき重要な意味を持つことが分かる．後述のように，残留応力なども接線係数座屈荷重に簡単に反映できることが分かる．

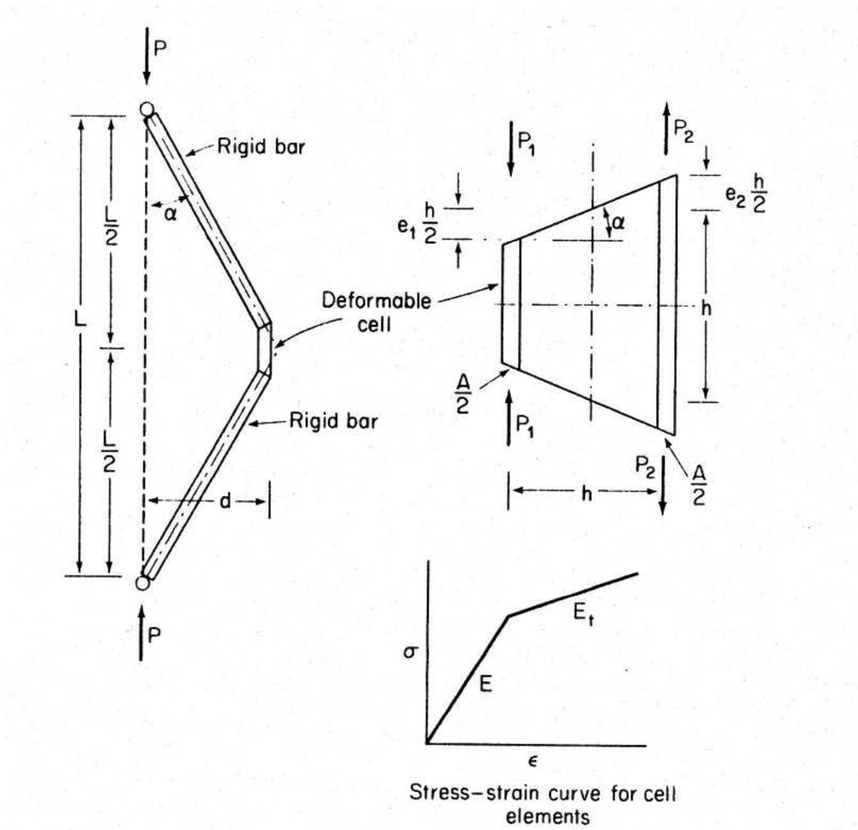


図 8　Shanley Model のコンセプト

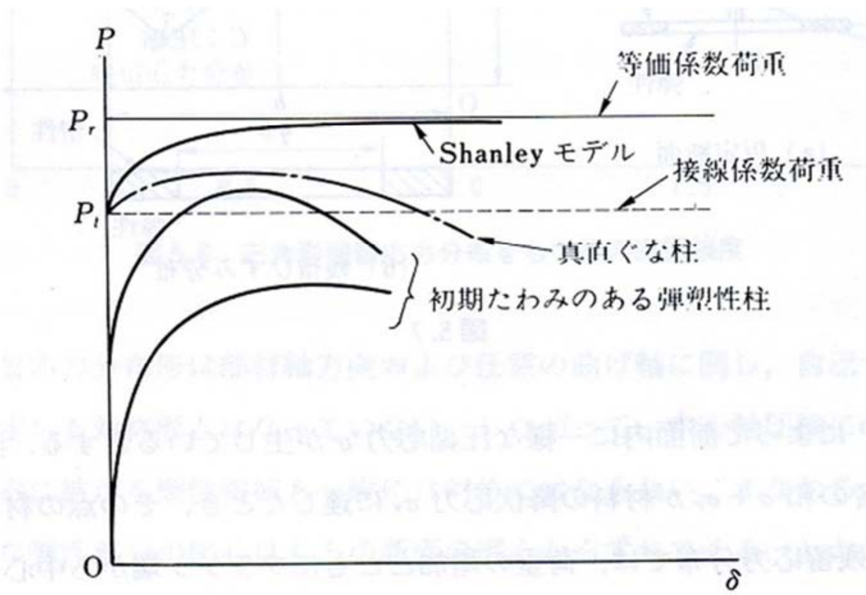


図 9　接線係数座屈荷重と等価係数座屈荷重(福本，1987)

更に，図 10 は鋼構造物の耐荷性状を一般的に表したものである(Watanabe，1985)．こ

の図でⓐは線形の荷重たわみ曲線 ⓑは局部的降伏を生じて最終的に塑性崩壊へ至る場合の荷重たわみ曲線 ⓒは完全な塑性崩壊荷重 ⓓは全体的座屈荷重 ⓔは初期不整のある場合の荷重たわみ曲線 ⓕは初期不整の他に残留応力などによって降伏が起こる場合の荷重たわみ曲線 ⓖは脆性破壊が弾性線形直線上でおこる点 ⓗはより一般的な脆性破壊を伴う荷重たわみ曲線を表している．

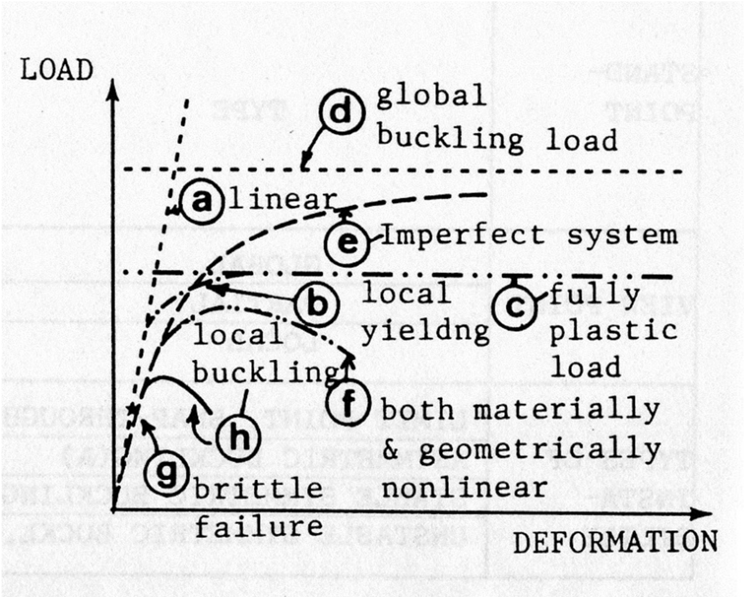


図 10　座屈・降伏を伴う鋼構造物の一般的耐荷性状（Watanabe, 1985）

1.7　初期たわみと偏心のある柱

（例）　図 11 に示されているように，両端単純支持で両端において偏心 e，柱中央で初期たわみ $a(=\delta_o)$ を有する柱が軸力Pを受ける弾性柱を考える．そのとき柱は弾性挙動をするものと考え，荷重 P と初期たわみ量 a，偏心量 e の関係を求めてみよう．

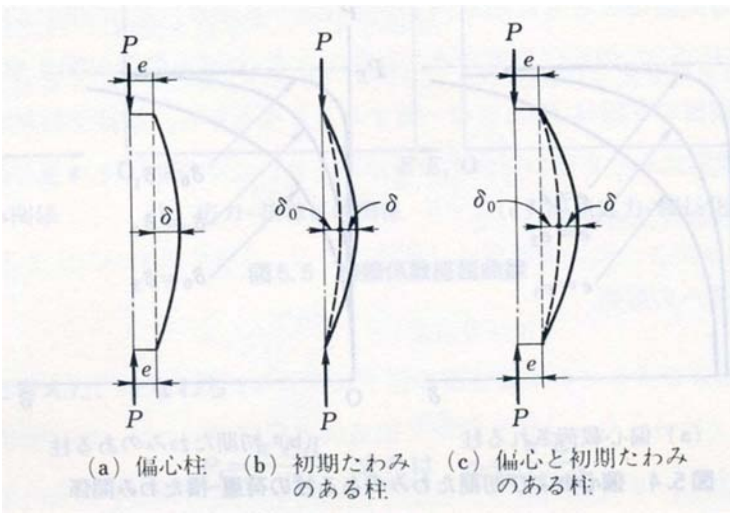


図 11　初期たわみ量，偏心量を有する柱の弾性挙動(福本，1987)

1) 柱のモーメントの釣り合いの基礎微分方程式はたわみを v とすれば以下のとおりである．

$$EI\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{dx}^2}+P(v+v_o)+Pe=0 \text{ すなわち，} \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{dx}^2}+\omega^2v=-\omega^2\mathrm{e}-\omega^2v_o \qquad (10)$$

$$\text{今}\quad v_o=a\sin\frac{\pi}{l}x \quad (a=\delta_o),\ \ \omega^2=\frac{P}{EI} \qquad (11)$$

とすれば，この解は以下の式で与えられる．

$$v=A\cos\omega\mathrm{x}+B\sin\omega\mathrm{x}-e-\frac{\omega^2}{\omega^2-{\omega_{cr}}^2}a\sin\omega_{cr}x \qquad (12)$$

ここに，$\omega_{cr}=\frac{\pi}{l}$,　　そして　定数 A, B　は境界条件：

$v=0$　@　$x=0$ および $x=l$

$M=Pe$　@　$x=0$ および $x=l$

これより

$$A=e \quad \text{そして} \quad B=\frac{1-\cos\omega l}{\sin\omega l}e \qquad (13)$$

したがって　たわみ v は以下のように求められる．

$$v=e(\cos\omega\mathrm{x}-1)+e\frac{1-\cos\omega l}{\sin\omega l}\sin\omega\mathrm{x}-e-\frac{\omega^2}{\omega^2-{\omega_{cr}}^2}a\sin\omega_{cr}x \qquad (14)$$

スパン中央でのたわみ $v_c=\mathrm{e}(\cos\frac{\omega l}{2}-1)+e\frac{1-\cos\omega l}{\sin\omega l}\sin\frac{\omega l}{2}-\frac{\omega^2}{\omega^2-{\omega_{cr}}^2}a$

$$=e(\sec\frac{\omega l}{2}-1)+a\frac{\frac{P}{P_{cr}}}{1-\frac{P}{P_{cr}}} \qquad (15)$$

2) 縁応力　σ_m はしたがって以下のように求められる．

$$\sigma_m=\frac{P}{A}+\frac{Pc}{I}(\mathrm{w}_c+\mathrm{e})=\frac{P}{A}\left\{1+\frac{c}{r^2}[e\sec\frac{\omega l}{2}+\frac{a}{1-\frac{P}{P_{cr}}}]\right\}$$

$$=\bar{\sigma}\left\{1+\frac{c}{r^2}[e\sec\frac{\pi l}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}+\frac{a}{1-\frac{P}{P_{cr}}}]\right\} \qquad (16)$$

ここに　$\bar{\sigma}=\frac{P}{A}$: 平均軸応力，c は柱の中立軸からの縁端距離，r は断面の回転半径（$I=\mathrm{A}r^2$）である．

いま縁応力σ_mが降伏応力σ_Yに達すれば以下の式を得る．

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y}=\frac{1}{1+\frac{c}{r^2}[e\sec\frac{\pi l}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}+\frac{a}{1-\frac{P}{P_{cr}}}]} \tag{17}$$

ところで Euler の弾性座屈荷重P_{cr}は $P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{L^2}=\frac{\pi^2 EI}{L^2}=\frac{\pi^2 EAr^2}{L^2}=\frac{\pi^2 EA}{(\frac{L}{r})^2}$ で

表せるから結局，座屈応力 σ_{cr} は $\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{(\frac{L}{r})^2}=\frac{\sigma_Y}{\lambda^2}$ と表せる．ここに $\lambda=\frac{L}{\pi r}\sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}}$

は一般化細長比と呼ばれる量である．したがって，縁応力が降伏応力に達した時の無次元化された平均圧縮応力は偏心量と初期たわみ量を用いて以下のように表せることが分かる．

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y}=\frac{1}{1+\frac{ce}{r^2}\sec\frac{\pi\lambda}{2}\sqrt{\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y}}+\frac{ca}{r^2}\frac{1}{1-\lambda^2\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y}}]} \tag{18}$$

図 12 は偏心荷重を受ける場合と初期たわみがある場合の柱の中央部でのたわみの大きさの変化を示したものである(弾性線形挙動).

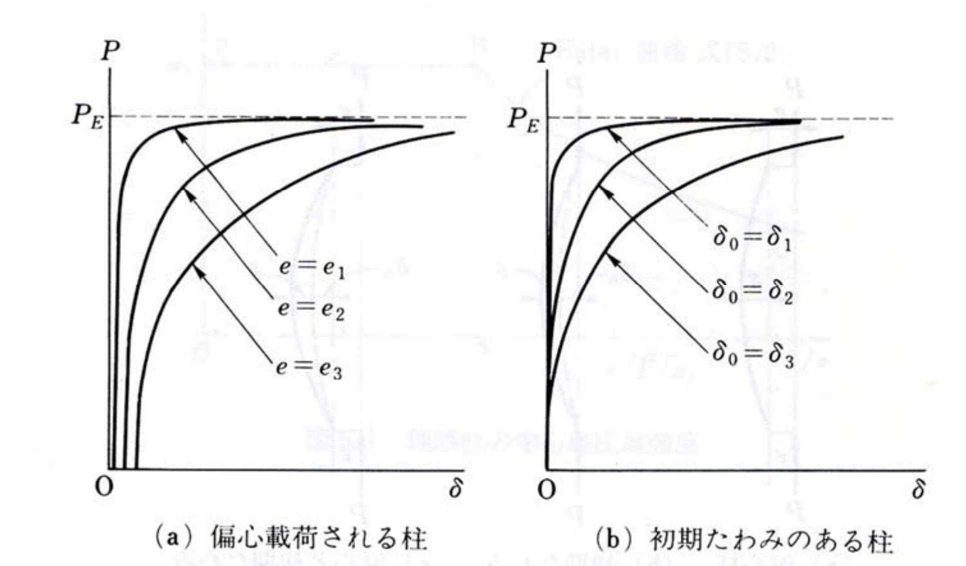


図 12 柱のたわみの荷重による増加(弾性線形挙動)(福本，1987)

1.8 座屈荷重に与える残留応力の影響

いま，一例として広幅フランジをもつ圧延 H 型断面の柱を考えよう．ただし，この残留応力は図 13 のように，厚さに亘って一様に分布しているものとする．

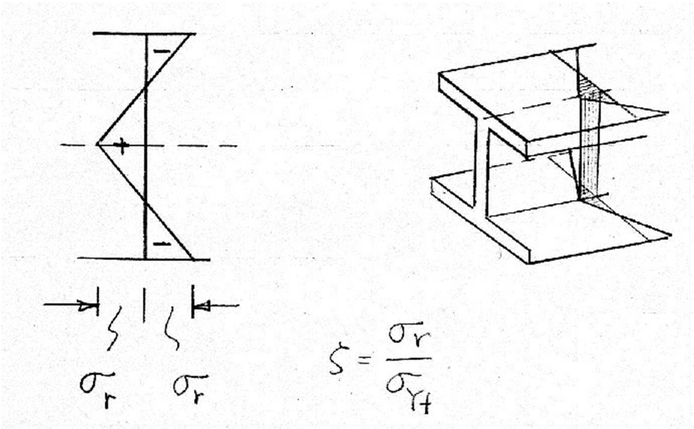


図 13 圧延鋼 H 型断面のフランジ部における三角形状の残留応力分布

ここでさらに，フランジの降伏応力のζ倍の大きさをもった残留応力がフランジ幅方向に三角形状に分布していると仮定しよう．この残留応力の大きさをσ_r，フランジの降伏応力をσ_{Yf}で表すと，

$$\zeta = \frac{\sigma_r}{\sigma_{Yf}} \tag{19}$$

このフランジに圧縮力が作用すると，応力は最初の残留応力に作用圧縮力による応力が追加され，以下のようなシナリオにより①~⑤の各段階でフランジ幅方向の応力分布が記述ができる．着目している一フランジの断面積をA_f，フランジのひずみをεとすれば，図 14 を参考にして，

$$\left.\begin{array}{l} ① \ \bar{\sigma} = \frac{P}{A_f}=0; \quad \varepsilon = 0 \\ ② \ 0< \bar{\sigma} \leq \sigma_{Yf}(1-\zeta); \ \varepsilon = \frac{\bar{\sigma}}{E} \\ ③ \ \bar{\sigma} = \sigma_{Yf}(1-\zeta); \quad \varepsilon = \frac{\bar{\sigma}}{E} \end{array}\right\} \quad \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon} = E \tag{20}$$

$$④ \ \bar{\sigma} = \sigma_{Yf}(1-k^2\zeta)\sigma_{Yf}; \ \varepsilon = \frac{\bar{\sigma}}{E}\,[1+(1-2k)\zeta] \quad \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{d\bar{\sigma}}{\mathrm{dk}}\frac{\mathrm{dk}}{d\varepsilon} = kE \tag{21}$$

$$⑤ \ \bar{\sigma} = \sigma_{Yf}; \quad \varepsilon = \frac{\bar{\sigma}}{E}\,[1+(1+\zeta) \qquad \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon} = 0 \tag{22}$$

弱軸回りの慣性二次モーメントは図 15 のように，弾性部分の有効断面を考えれば以下

のような弾性コアの貢献を考えて等価な断面二次モーメントを考えることができる：

$$\mathrm{I}_e = 2\times\frac{t_f d^3}{12} = \frac{t_f d^3}{6} = \frac{Ad^2}{3} \quad (\mathrm{A}\cong 2A_f) \tag{23}$$

$$\bar{\mathrm{I}} = k^3 I_e$$

$$\bar{\sigma}_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E\bar{I}}{AL^2} = k^3\frac{\pi^2 EI_e}{AL^2} = \frac{k^3\pi^2 E}{12\left(\frac{L}{d}\right)^2} = k^3\sigma^e{}_{cr} \tag{24}$$

ここに,

$$\sigma^e{}_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{d}\right)^2} \tag{25}$$

この両辺をσ_{Yf}で除すれば

$$\tilde{\sigma}^p{}_{cr} = \frac{\bar{\sigma}_{cr}}{\sigma_{Yf}} = k^3\tilde{\sigma}^e{}_{cr} = k^3\frac{\sigma^e{}_{cr}}{\sigma_{Yf}} = \frac{k^3\pi^2}{12\left(\frac{L}{d}\right)^2}\left(\frac{E}{\sigma_{Yf}}\right) = \frac{k^3}{\left[\sqrt{12}\frac{L}{\pi d}\sqrt{\frac{\sigma_{Yf}}{E}}\right]^2} \tag{26}$$

これは H 形断面のいわゆる弱軸周りの座屈に対応する.

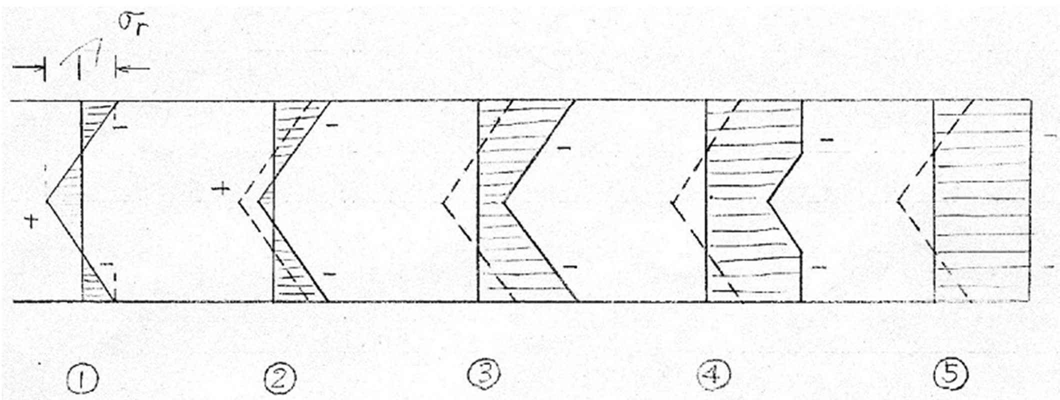


図 14　鋼 H 形断面柱フランジ部の軸圧縮応力の増加による同部の応力変化

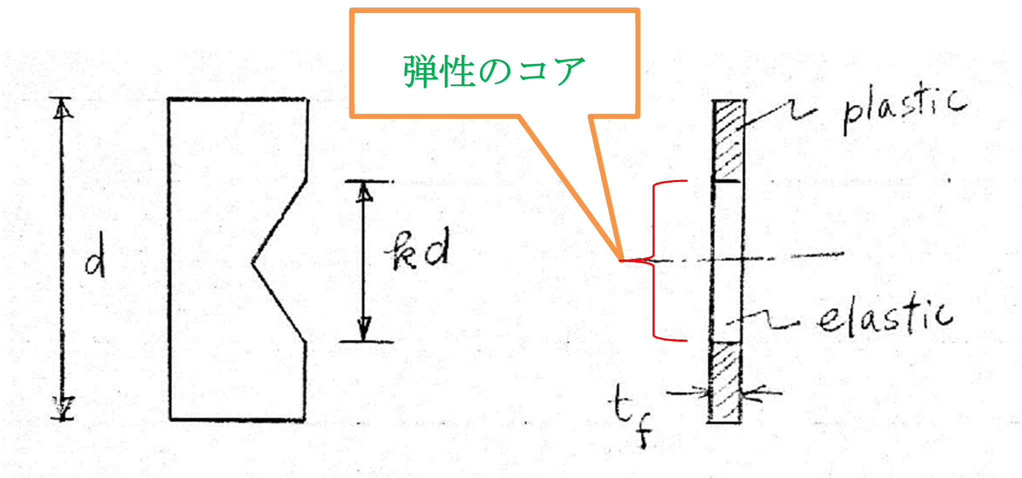


図 15 鋼H形柱の弾性部分の有効断面

（例１）　SS400（JIS G3101）一般構造用圧延鋼材
ヤング係数 $2.0\times 10^5 N/mm^2$； 降伏点または耐力 $245\ N/mm^2$

$$\frac{E}{\sigma_{Yf}} = 2.0\times\frac{10^5}{245} = 816 \quad \therefore \tilde{\sigma}^e{}_{cr} = \frac{671.13}{\beta^2}\ , \quad \beta = \frac{L}{d}\,, \quad \tilde{\sigma}^p{}_{cr} = k^3\tilde{\sigma}^e{}_{cr}$$

図 16 はζ=0.5 のときの数値計算例を示す．縦軸は降伏応力で無次元化された軸圧縮応力$\tilde{\sigma}^p{}_{cr}$ の値，横軸は$\beta = L/d$ を示している．残留応力は降伏応力の 50%であるから，非弾性部分は$\tilde{\sigma}^p{}_{cr}$の 0.5～1.0 までの分岐曲線に対応することが分かる．$\tilde{\sigma}^p{}_{cr}$= 0.5 からはその右の弾性 Euler 座屈曲線へ移行することになる．

なお，ζ=0.3 の場合については青木・福本は弱軸周りのほか，強軸周りについても図 17 のような結果を得ている．

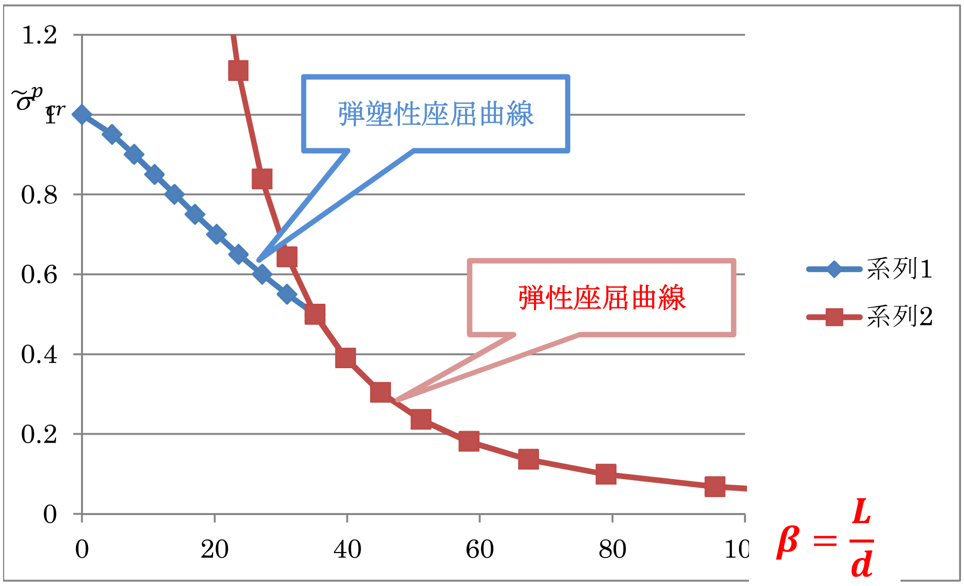


図 16　鋼 H 形柱の弾塑性座屈強度(残留応力は降伏応力の 50%)

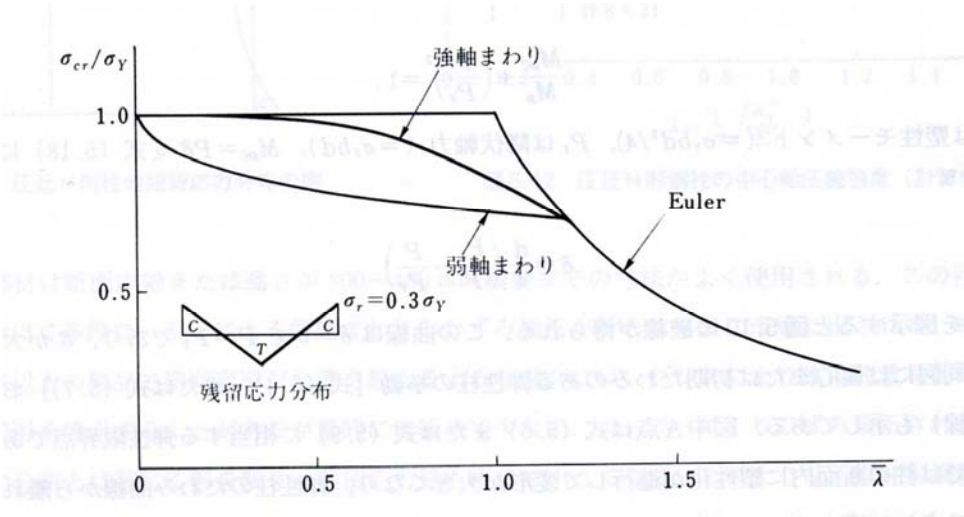


図 17　三角形残留応力を有する柱の弱軸・橋軸回りの座屈（青木・福本，1972）

1.9 柱の有効座屈長

現実的には柱は弾性支持されている．図 18 は例として下端単純支持，右端固定支持のラーメンの例である．

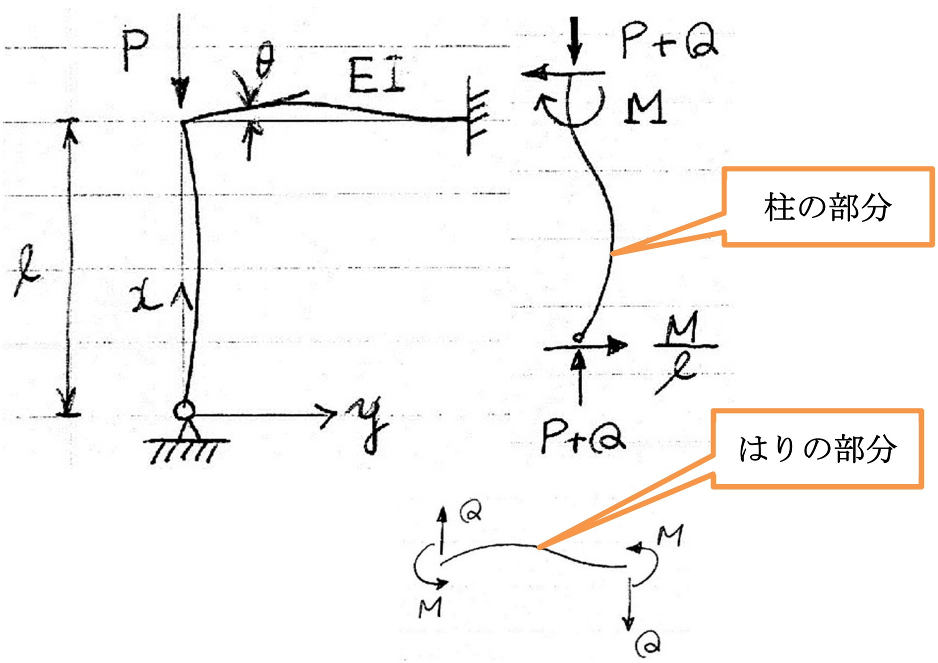


図 18　下端単純支持，右端固定支持のラーメン

$$-EI\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}-Pv+\frac{M}{l}x=0 \tag{27}$$

$$\therefore v = \mathrm{A}\sin\omega x + \mathrm{B}\cos\omega x + \frac{Mx}{Pl} = 0 \tag{28}$$

境界条件は　　$v = 0 \ @ x = 0 \ \& \ x = l$

$$\therefore \mathrm{A} = -\frac{M}{P\sin\omega l}\ ; \quad \mathrm{B} = 0 \tag{29}$$

$$v = \frac{M}{P}\left(\frac{x}{l} - \frac{\sin\omega x}{\sin\omega l}\right) \quad \therefore v'|_{x=l} = \frac{M}{P}\left(\frac{1}{l} - \frac{\omega\cos\omega l}{\sin\omega l}\right)$$

$$= \frac{M}{\omega EI}\left(\frac{1}{\omega l} - \frac{1}{\tan\omega l}\right) \tag{30}$$

一方

$M = \frac{2EI}{l}(2\theta) = -\frac{4EI}{l}v'|_{x=l}$　したがって，

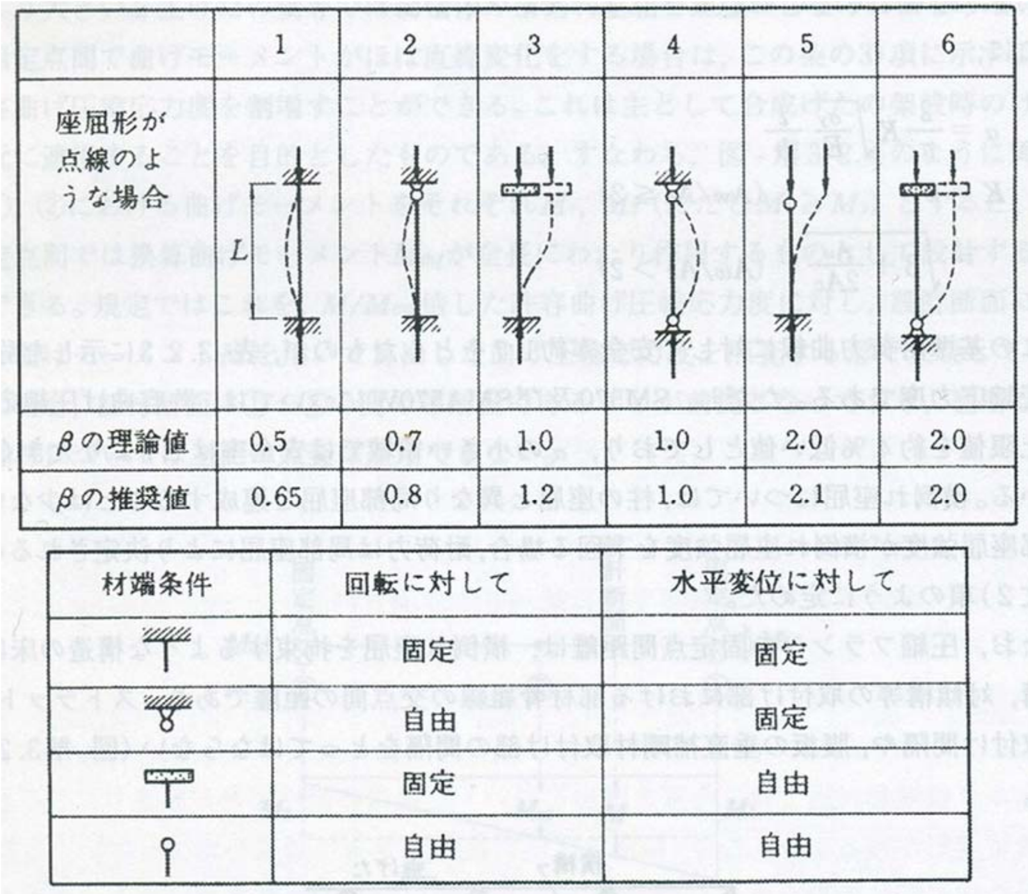
$$\frac{\omega l}{4} = -\left(\frac{1}{\omega l} - \frac{1}{\tan\omega l}\right) \quad \text{あるいは} \quad \tan\omega l = \frac{4\omega l}{4+(\omega l)^2} \tag{31}$$

$(\omega l)_I = 3.83$　であることから　　$P_{cr} = \frac{14.7EI}{l^2}$　（有効座屈長は 0.82 l）

参考として　両端単純支持の柱では　　$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

一端固定，一端単純支持の柱では　　$P_{cr} = \frac{20.EI}{l^2}$　（有効座屈長は 0.7 l）

図 19 には異なる支持条件の様々な柱の有効座屈長が与えられている．β の推奨値というのは実際の固定端は言うほど絶対的なものは存在せず，ボルト接合，ガセットプレートなどや溶接などによって固定したように見えても若干フレキシビリティーをもっていることを考慮したものである．



	1	2	3	4	5	6
座屈形が点線のような場合						
βの理論値	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
βの推奨値	0.65	0.8	1.2	1.0	2.1	2.0

材端条件	回転に対して	水平変位に対して
	固定	固定
	自由	固定
	固定	自由
	自由	自由

図 19　異なる支持条件下の柱の有効座屈長(βL)(日本道路協会，2002)

1.10　現実の柱の強度分布

これまで主として弾性柱の座屈性状について述べてきたが実際の柱については各種の初期たわみや偏心，そして残留応力があるため柱の強度・耐荷力には統計的ばらつきがある．このため実際の設計ではこのようなばらつきを考慮する必要がある．福本らは多くの実験データをデータバンクの形でまとめている（福本・伊藤，1981）．例えば図 20 (Watanabe, 1985)，図 21 (福本，1987) はそのような柱の座屈実験の結果を引用してプロットさせて頂いたものであり，特に実用的な中間柱領域(弾塑性座屈の領域)でのばらつきが目立つ．また，図 22 ECCS の鋼柱曲線を圧延，溶接，断面形状の区別を考慮してプロットしたものである．なお，Curve c は日本で採用されている柱の座屈曲線が基準としている曲線である(福本，1987)．さらにヨーロッパ，米国，日本の柱強度に関する複数柱強度曲線を比べると図 23 のとおりとなる（福本・伊藤，1983)．

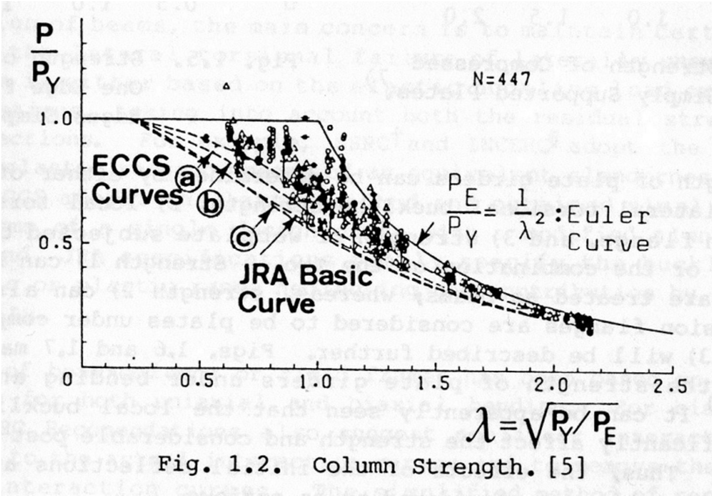


図 20　柱の座屈実験の結果（Watanabe, 1985; Fukumoto，1981）

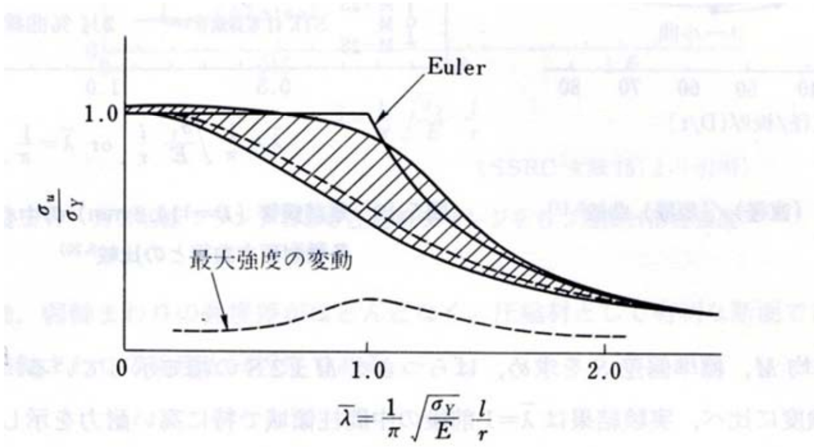


図 21　座屈実験結果の分布とばらつき(福本，1987)

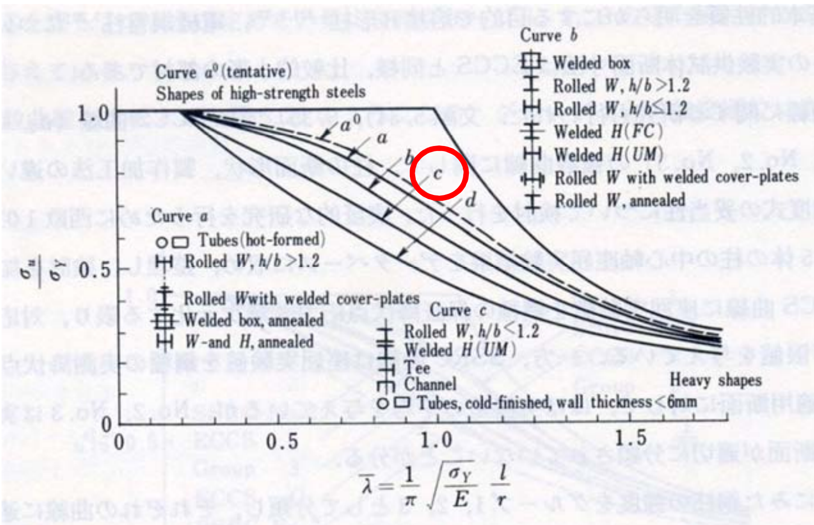
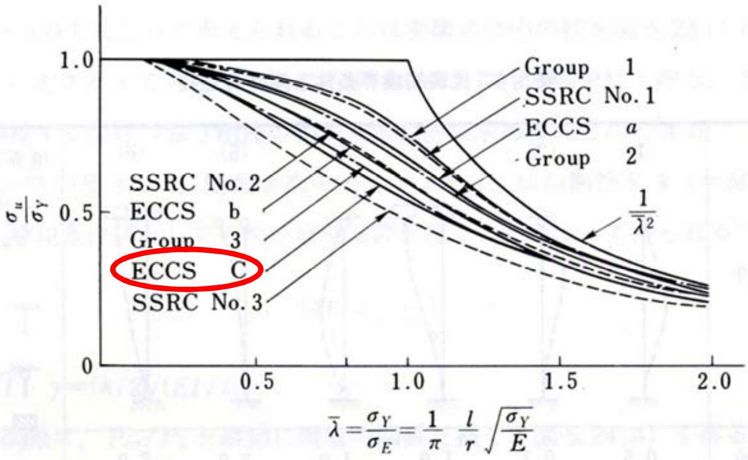


図 22　ECC の各種鋼柱の柱強度曲線(福本，1987)



1)	ECCS a_0,	SSRC No. 1	Group 1
2)	ECCS a,	——	Group 2
3)	ECCS b,	SSRC No. 2	——
4)	ECCS c	——	Group 3
5)	ECCS d,	SSRC No. 3	——

図 23　ECCS, SSRC などによる鋼柱の基準耐荷力曲線(福本・伊藤，1983)

図 24 は我が国の示方書で採用されている柱の耐荷力曲線を示している．その内基準としているのは曲線Ⅴである．これは設計の簡略化のため一本の耐荷力曲線だけを用いることにしたとある．すなわち，同図の 4 本の曲線のほぼ下限値に相当する次式を採用している．

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma} &= 1.0 && (\bar{\lambda} \leq 0.2) \\ \bar{\sigma} &= 1.109 - 0.545\bar{\lambda} && (0.2 \leq \bar{\lambda} \leq 1.0) \\ \bar{\sigma} &= \frac{1.0}{0.773+\bar{\lambda}^2} && (1.0 \leq \bar{\lambda}) \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

ただし，$\bar{\sigma} = \dfrac{\sigma_{cr}}{\sigma_Y}$,　$\bar{\lambda} = \dfrac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{\sigma_Y}{E}} \cdot \dfrac{l}{r}$　(33)

なお，許容軸方向応力度は上記の基準耐荷力曲線に対して安全率 1.7 をとり定めることを基本方針としている．

2012 年の道路橋示方書の改定では，構造の合理化という観点から，この基準耐荷力曲線に加えて圧縮部材において一般的に使用されている溶接箱型断面を対象として式

(解 3.2.2)の基準耐荷力曲線を新たに設定している(日本道路協会，2012).

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{\sigma} = 1.0 & (\bar{\lambda} \le 0.2) \\ \bar{\sigma} = 1.059 - 0.258\bar{\lambda} - 0.190\bar{\lambda}^2 & (0.2 \le \bar{\lambda} \le 1.0) \\ \bar{\sigma} = 1.427 - 1.039\bar{\lambda} + 0.223\bar{\lambda}^2 & (1.0 \le \bar{\lambda}) \end{array}\right\} \quad (解\ 3.2.2)$$

図 25 は解 3.2.2 の基準耐荷力曲線を示しているが，図 24 の 2 つの曲線 II および III の中間に位置するものである.

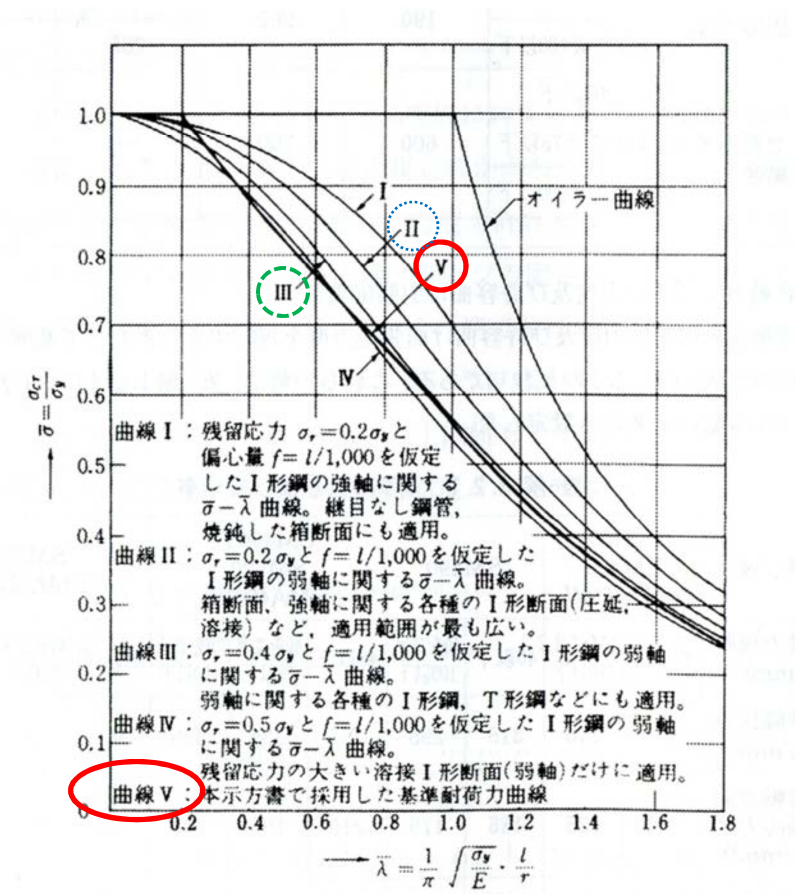


図 24　我が国道路橋示方書・同解説の柱の耐荷力曲線(日本道路協会，2002)

また，図 26 は例として図 24 に基づき規定される許容応力の値を板厚 40 ㎜以下の場合の SM570 材および SMA570 W 材を例にとったものであり，横座標には柱の細長比：$\frac{l}{r}$（ここに，r は断面の回転半径)，縦軸には軸方向圧縮応力度 $\sigma\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right)$ をプロットしている．安全率は 1.7 にとってある．詳細は道路橋示方書 3.2　鋼材の許容応力度以下を参照されたし(日本道路協会，2002 & 2012).

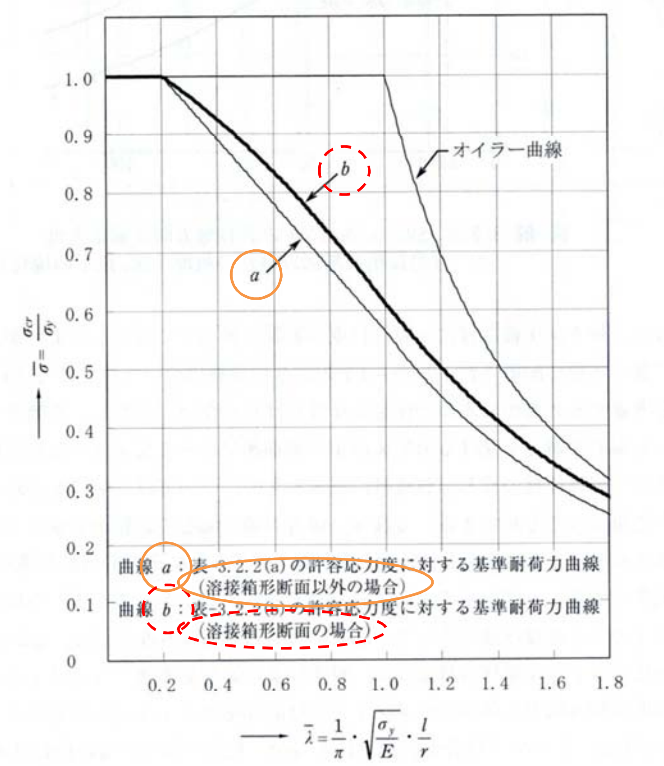


図-解 3.2.2　表-3.2.2 の許容応力度に対する基準耐荷力曲線

図 25　溶接箱形断面柱の基準耐荷力曲線（日本道路協会，2012）

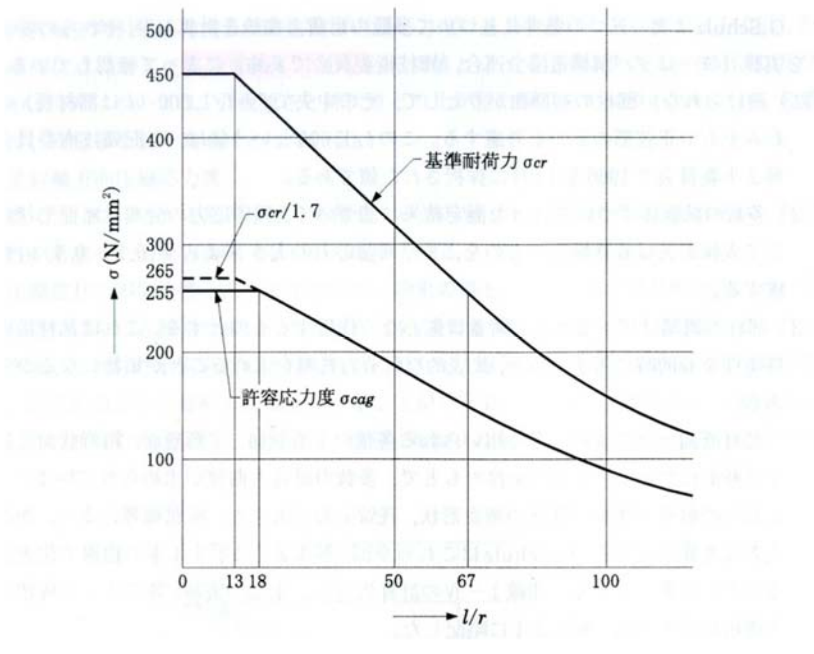


図 26　SM570，SMA570W の許容軸方向応力度（日本道路協会，2002）

1.11 はりの弾性横ねじれ座屈　Elastic lateral torsional buckling

もし，曲げ部材の圧縮部に適当な横方向の拘束が無ければこの部材は曲げによる圧縮応力が降伏応力に達するまでに横方向にねじれつつ座屈する．

ところで良く知られた公式　$\sigma = \frac{M}{I} c$（M は曲げモーメント，I は断面二次モーメント，c は縁端距離）の成り立つ条件を考えてみれば，それは以下のとおりである．

1. Plane sections remain plane,　（平面保持）
2. Hooke's law of stress-strain relationship,　（フックの法則）
3. Homogeneity and isotropy of materials,　（等質等方性）
4. Pure bending as applied force,　（純曲げモーメント）
5. Beam is straight (radius of curvature not too small, say, $R \geq 10h$, $h =$ depth of the beam)　（直線ばり）
6. Neutral axis perpendicular to plane of applied moments
　　（中立軸　は　モーメント作用面　に直交）
7. Bending is in the plane of applied moments (i.e., no lateral buckling)
　　（曲げはモーメントの作用面内に生じる）

いま図 27 に示されているような，両端にモーメントを受けるはりを考える．

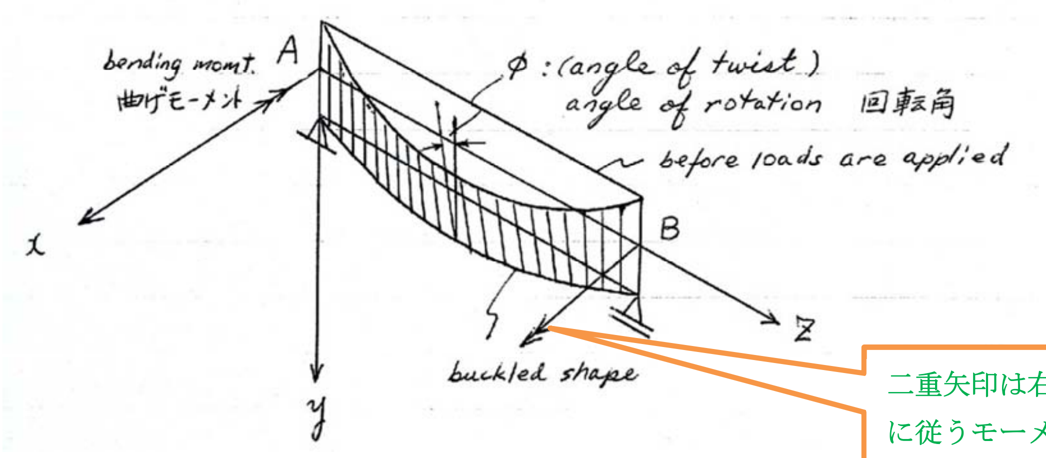


図 27　横ねじれ座屈を生じたはり

二重矢印は右ネジの法則に従うモーメントを意味する

図 28 はそのようなはりの変形を考慮したつり合い式を考えるものである．

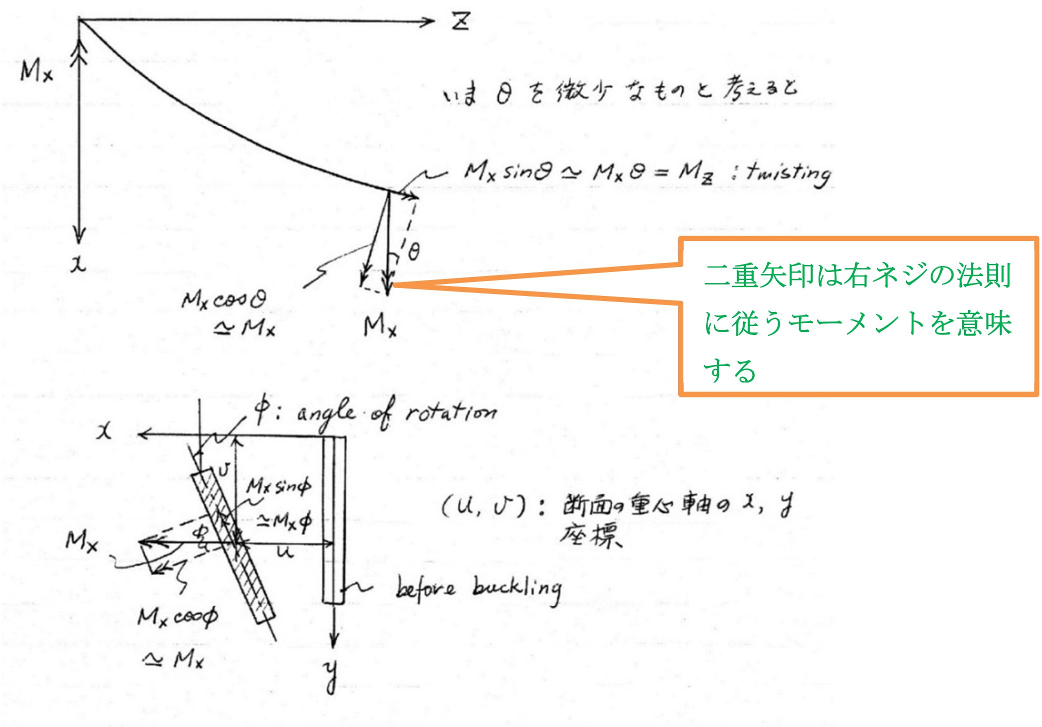


図 28　横ねじれ座屈したはりのつり合い

したがって，つり合い式は以下のように求められる．

$$-EI_y\frac{d^2u}{dz^2} = M_x\emptyset \tag{34}$$

$$-EI_x\frac{d^2v}{dz^2} = M_x \tag{35}$$

$$GJ\frac{d\emptyset}{dz} - EC_w\frac{d^3\emptyset}{dz^3} = M_x\theta \cong M_x\frac{du}{dz} \tag{36}$$

$$\therefore GJ\frac{d^2\emptyset}{dz^2} - EC_w\frac{d^4\emptyset}{dz^4} = M_x\frac{d^2u}{dz^2} \cong -M_x\frac{M_x}{EI_y}\emptyset \quad (M_x = \text{constant of } z) \tag{37}$$

$$\therefore \frac{d^4\emptyset}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w}\frac{d^2\emptyset}{dz^2} - \frac{{M_x}^2}{EC_wEI_y}\emptyset = 0 \tag{38}$$

いま　$\emptyset = Ae^{\lambda z}$　とおけば

$$\lambda^4 - \frac{GJ}{EC_w}\lambda^2 - \frac{{M_x}^2}{EC_wEI_y} = 0 \tag{39}$$

$$\therefore \lambda^2 = \frac{GJ}{2EC_w} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{GJ}{EC_w}\right)^2 + \frac{{M_x}^2}{EC_wEI_y}} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta} \tag{40}$$

ここに，$\alpha = \frac{GJ}{2EC_w} > 0;\ \beta = \frac{{M_x}^2}{EC_w EI_y} > 0$ (41)

$\therefore \lambda = \pm\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta}};$ (42)

ここで

$m = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}};\ \ n = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}}$ (43)

とおけば

$\therefore \lambda = \pm n,\ and\ \ \lambda = \pm mi$ 　となり，∅の一般解はつぎのとおりである

$\emptyset = A_1 \sin mz + A_2 \cos mz + A_3 e^{nz} + A_4 e^{-nz}$ (44)

今，桁端においては回転角∅がなく，かつ，反りが拘束されないとすれば，反りがd∅/dz　に比例するという曲げねじり理論に従えば

$\emptyset = \frac{d^2\emptyset}{dz^2} = 0 \quad @\, z = 0, l$　となり， (45)

$A_2 + A_3 + A_4 = 0$　及び　$-m^2 A_2 + n^2 A_3 + n^2 A_4 = 0$ (46)

これより，$A_2 = 0,\ A_4 = -A_3$

よって∅　は次のようになる．

$\emptyset = A_1 \sin mz + 2A_3 \sinh nz$ (47)

$z = l$ での境界条件により

$$\begin{bmatrix} \sin ml, & 2\sinh nl \\ m^2 \sin ml, & -2n^2 \sinh nl \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{Bmatrix} = 0 \tag{48}$$

A_1，A_3 が同時に零でないためには

$2\sin ml\ \sinh nl (n^2 + m^2) = 0$ (49)

n, m は共に正の値を持つので$n^2 + m^2 \neq 0$,　また $\sinh nl > 0$　なので

$$\sin ml = 0 \qquad \text{よって} \quad ml = \pi \tag{50}$$

このとき　　$\frac{\pi}{l} = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}}$

$$\therefore \quad \beta = -\alpha^2 + \left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \alpha\right]^2 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left[2\alpha + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right] \tag{51}$$

$$\therefore \quad (M_x)_{cr} = E\left(\frac{\pi}{l}\right)\sqrt{C_w I_y}\sqrt{2\alpha + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2} = E\left(\frac{\pi}{l}\right)\sqrt{C_w I_y}\sqrt{2 \times \frac{GJ}{2EC_w} + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}$$

$$= E\left(\frac{\pi}{l}\right)\sqrt{\frac{GI_yJ}{E} + C_w I_y \left(\frac{\pi}{l}\right)^2} \tag{52}$$

(1)　反りねじり剛性が無視できるとき(大半の市販寸法の分厚くずんぐりした断面の I 形あるいは幅広ワイドフランジ断面)の場合

$EC_w = 0$　だから

$$(M_x)_{cr} = EI_y\left(\frac{\pi}{l}\right)\sqrt{\frac{GJ}{EI_y}} \tag{53}$$

さて図 29 のような対称 WF 断面の場合

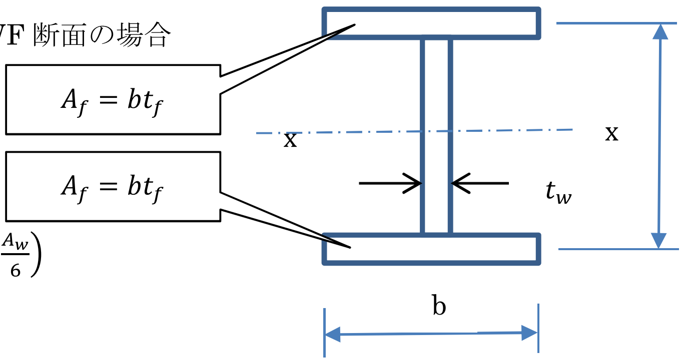


図 29　対称 WF 断面

$$I_y \cong \frac{t_f b^3}{6}$$

$$I_x = \frac{t_w d^3}{12} + \frac{bt_f d^2}{2} = \frac{d^2}{2}\left(A_f + \frac{A_w}{6}\right)$$

$$J = \frac{2}{3}bt_f^3 + \frac{dt_w^3}{3}$$

簡単のため

$J \cong \frac{2}{3}bt_f^3$　　$(1 \gg \frac{1}{2}(\frac{d}{b})(\frac{t_w}{t_f})^3$ と仮定)

$I_x \cong \frac{d^2}{2}A_f = \frac{d^2}{2}bt_f$　($A_f \gg \frac{A_w}{6}$ と仮定)

そうすると

$$\frac{G}{E}=\frac{1}{2(1+\nu)}=\frac{1}{2(1+0.3)}=\frac{1}{2.6}$$

$$\frac{J}{I_y}\cong\frac{6}{b^3t_f}\times\frac{2}{3}bt_f^3=4(\frac{t_f}{b})^2$$

$$\therefore (M_x)_{cr}=\frac{2\pi}{\sqrt{2.6}}\frac{EI_yt_f}{lb}$$

$$\therefore \sigma_{cr}=\frac{(M_x)_{cr}}{I_x}\frac{d}{2}=\frac{\pi E}{3\sqrt{2.6}}\frac{bt_f}{ld}\cong 0.65E\frac{bt_f}{ld}\quad [\frac{GI_yJ}{E}\gg C_wI_y\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \text{ のとき} C_wI_y=0 \text{ と仮定}]$$

(2)　比較的桁高の高い薄肉の腹板のはりでは反りねじり(C_wI_y)の影響は重要である.

$[\frac{GI_yJ}{E}\gg C_wI_y\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$ のとき $\frac{GI_yJ}{E}=0$ と仮定]

$$(M_x)_{cr}\cong E\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sqrt{C_wI_y}=E\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\frac{dI_y}{2} \tag{54}$$

よって

$$\sigma_{cr}=\frac{(M_x)_{cr}}{I_x}\frac{d}{2}=\frac{d^2}{4}E\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\frac{I_y}{I_x}=\frac{d^2}{4}E\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\frac{I_y}{\frac{d^2}{2}(A_f+\frac{A_w}{6})}$$

$$=E\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\frac{\frac{I_y}{2}}{A_f+\frac{A_w}{6}}=E\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\frac{\frac{A_f}{12}b^2}{A_f+\frac{A_w}{6}}=E\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\frac{A_fb^2}{4(3A_f+\frac{A_w}{2})}=\frac{\pi^2E}{4(\frac{Kl}{b})^2} \tag{55}$$

ここに

$$K=\sqrt{3+\frac{A_w}{2A_f}} \tag{56}$$

$$\therefore \bar{\sigma}=\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_Y}=\frac{1}{\bar{\lambda}^2},\quad \bar{\lambda}=\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}}\cdot\frac{Kl}{b} \tag{57}$$

道路橋示方書では基本曲げ耐荷力曲線を以下のように定めている.（日本道路協会，2002；野上，2006）

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}=\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_Y}&=1.0 && (\bar{\lambda}\leq 0.2)\\ &=1.0-0.412(\bar{\lambda}-0.2) && (0.2\leq\bar{\lambda}\leq\sqrt{2}\,*)\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

(*注:　上限値：　許容応力が極端に低下するのを防ぐためとオイラー座屈曲線は使わない)

図 30 ならびに図 31 は福本らにより蓄積されたデータバンクを基に数多くの実験データを

参考にしてプロットしたものである．鋼ばりの降伏応力により無次元化された応力と一般化細長比の関係を示したもので(page 176) (Watanabe, 1985)および ECCS 曲線，Euler の弾性座屈曲線，ならびに筆者によるカタストロフィー理論の分岐集合曲線などがプロットされている．上記の道路橋示方書の公式もその中に含まれている(JRA Specifications)．

さらに，図 32 は野上による鋼桁の横ねじれ座屈強度と道路橋示方書による基本耐荷力曲線を示したものである．

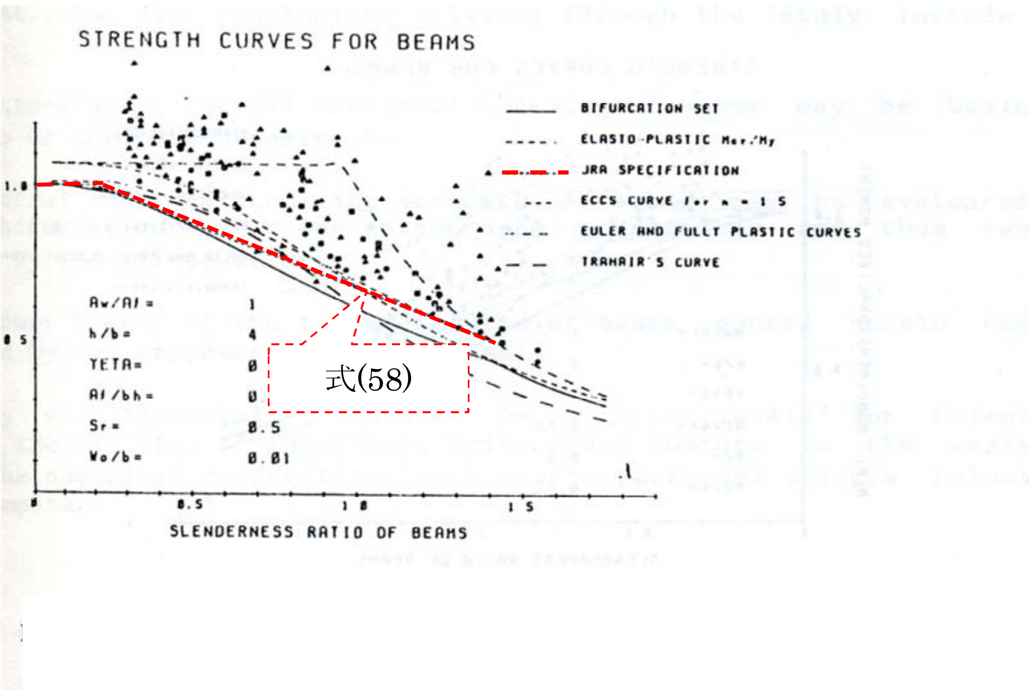


図 30　降伏応力により無次元化された鋼ばりの応力と一般化細長比の関係(page 176) (Watanabe, 1985)

1.12　実験強度に基づく耐荷力曲線

1.11 では弾性座屈に限定した議論がされている．図 33 および図 34 はそれぞれ圧延ばりと溶接ばりの実験強度と耐荷力曲線を示している．それぞれ横軸は一般化細長比：

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{M_p}{M_E}} \tag{59}$$

縦軸は

$$\delta_r = \frac{M_u}{M_p} \tag{60}$$

ここに，M_uははりの最大曲げモーメントに対応する耐荷力，M_pは全塑性モーメントを表し，M_Eは **1.11** で論議した弾性横ねじれ座屈モーメントを表している．

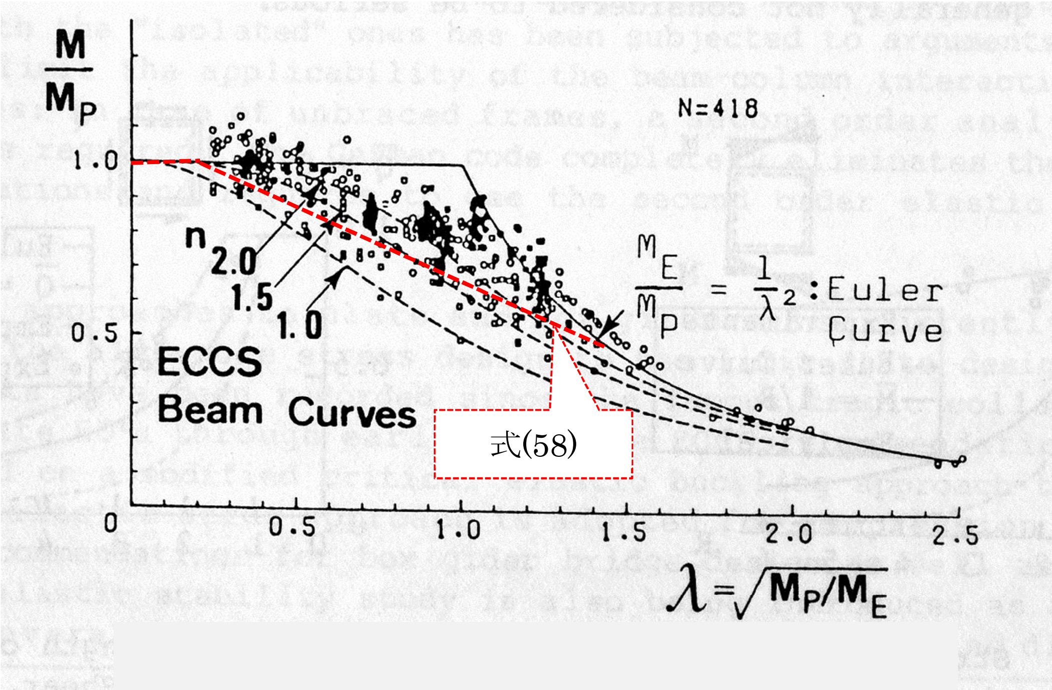


図 31　全塑性モーメントで無次元化された鋼はりの曲げモーメント強度と一般化細長比の関係（Watanabe, 1985; Fukumoto, 1981; Itoh, 1984）

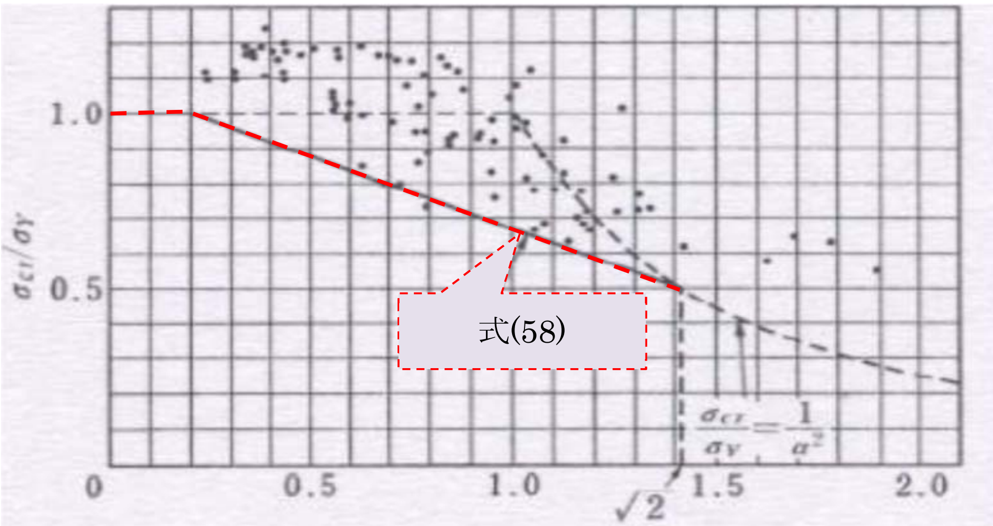


図 32　鋼桁の横ねじれ座屈強度と道路橋示方書　野上先生の文献　(野上，2006)より

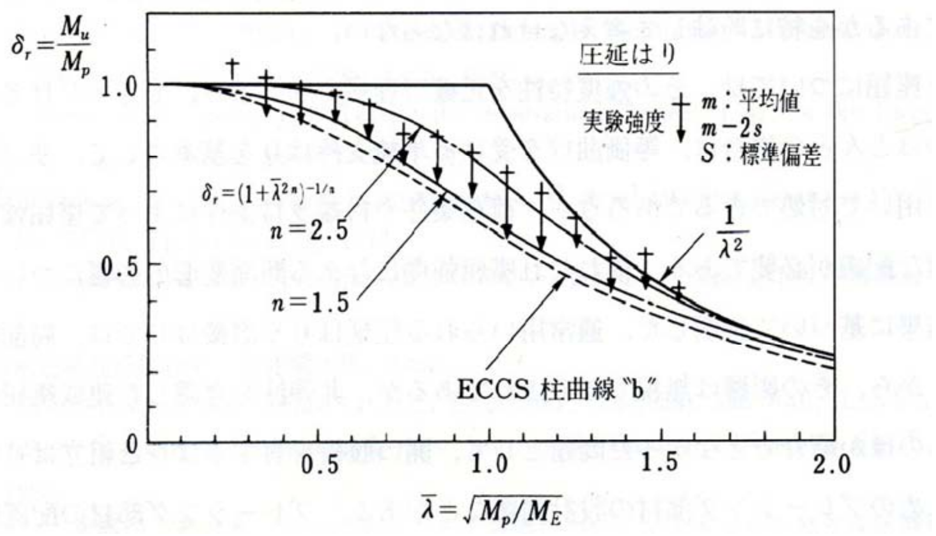


図 33　圧延ばりの実験強度と耐荷力曲線(福本，1987)

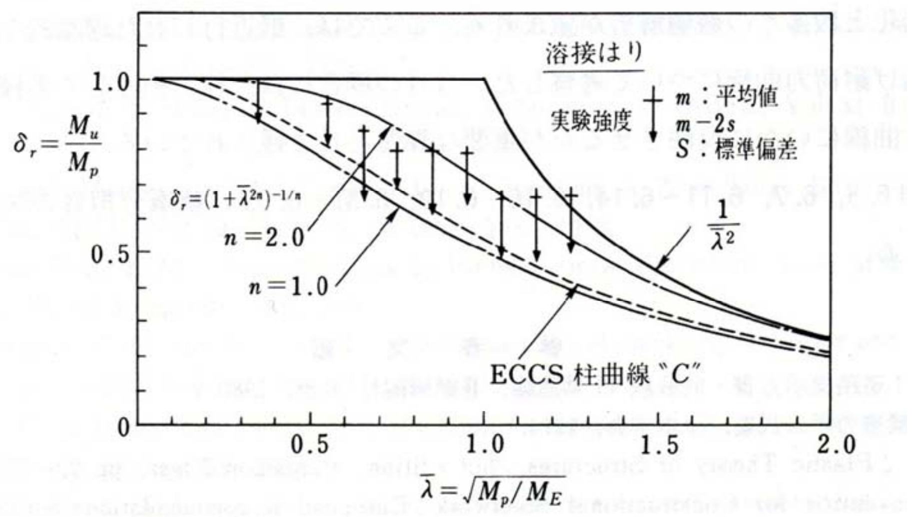


図 34　溶接ばりの実験強度と耐荷力曲線(福本，1987)

更に表 1 は道路橋示方書(日本道路協会, 2002)の基本耐荷力曲線を基に計算した許容曲げ応力を示している. 例えば SS400 の曲げ圧縮応力度 140(N/mm^2)は降伏強度の 1/1.7 である.

表１　道路橋示方書(日本道路協会，2002)の許容圧縮曲げ応力度

表-3.2.3(a)　許容曲げ圧縮応力度(N/mm²)
(圧縮フランジがコンクリート床版等で直接固定されている場合及び箱形断面，π型断面の場合)

鋼材の板厚(mm) ＼ 鋼種	SS400 SM400 SMA400W	SM490	SM490Y SM520 SMA490W	SM570 SMA570W
40以下	140	185	210	255
40をこえ75以下	125	175	195	245
75をこえ100以下			190	240

表-3.2.3(b)　許容曲げ圧縮応力度(N/mm²)
(表-3.2.3(a)に規定する以外の場合)

板厚(mm) ＼ 鋼種		SS400 SM400 SMA400W	SM490	SM490Y SM520 SMA490W	SM570 SMA570W
$\frac{A_w}{A_c} \leqq 2$	40以下	$140 : \frac{l}{b} \leqq 4.5$ $140 - 2.4\left(\frac{l}{b} - 4.5\right) : 4.5 < \frac{l}{b} \leqq 30$	$185 : \frac{l}{b} \leqq 4.0$ $185 - 3.8\left(\frac{l}{b} - 4.0\right) : 4.0 < \frac{l}{b} \leqq 30$	$210 : \frac{l}{b} \leqq 3.5$ $210 - 4.6\left(\frac{l}{b} - 3.5\right) : 3.5 < \frac{l}{b} \leqq 27$	$255 : \frac{l}{b} \leqq 5.0$ $255 - 6.6\left(\frac{l}{b} - 5.0\right) : 5.0 < \frac{l}{b} \leqq 25$
	40をこえ75以下	$125 : \frac{l}{b} \leqq 5.0$ $125 - 2.2\left(\frac{l}{b} - 5.0\right) : 5.0 < \frac{l}{b} \leqq 30$	$175 : \frac{l}{b} \leqq 4.0$ $175 - 3.6\left(\frac{l}{b} - 4.0\right) : 4.0 < \frac{l}{b} \leqq 30$	$195 : \frac{l}{b} \leqq 4.0$ $195 - 4.2\left(\frac{l}{b} - 4.0\right) : 4.0 < \frac{l}{b} \leqq 27$	$245 : \frac{l}{b} \leqq 4.5$ $245 - 6.2\left(\frac{l}{b} - 4.5\right) : 4.5 < \frac{l}{b} \leqq 25$
	75をこえ100以下			$190 : \frac{l}{b} \leqq 4.0$ $190 - 4.0\left(\frac{l}{b} - 4.0\right) : 4.0 < \frac{l}{b} \leqq 27$	$240 : \frac{l}{b} \leqq 4.5$ $240 - 6.0\left(\frac{l}{b} - 4.5\right) : 4.5 < \frac{l}{b} \leqq 25$
	40以下	$140 : \frac{l}{b} \leqq \frac{9}{K}$ $140 - 1.2\left(K\frac{l}{b} - 9\right) : \frac{9}{K} < \frac{l}{b} \leqq 30$	$185 : \frac{l}{b} \leqq \frac{8}{K}$ $185 - 1.9\left(K\frac{l}{b} - 8\right) : \frac{8}{K} < \frac{l}{b} \leqq 30$	$210 : \frac{l}{b} \leqq \frac{7}{K}$ $210 - 2.3\left(K\frac{l}{b} - 7\right) : \frac{7}{K} < \frac{l}{b} \leqq 27$	$255 : \frac{l}{b} \leqq \frac{10}{K}$ $255 - 3.3\left(K\frac{1}{b} - 10\right) : \frac{10}{K} < \frac{1}{b} \leqq 25$

<table>
<tr><td rowspan="2">$\frac{A_w}{A_c}>2$</td><td>40をこえ75以下</td><td rowspan="2">$125:\frac{l}{b}\leqq\frac{10}{K}$
$125-1.1\left(K\frac{l}{b}-10\right):\frac{10}{K}<\frac{l}{b}\leqq 30$</td><td rowspan="2">$175:\frac{l}{b}\leqq\frac{8}{K}$
$175-1.8\left(K\frac{l}{b}-8\right):\frac{8}{K}<\frac{l}{b}\leqq 30$</td><td>$195:\frac{l}{b}\leqq\frac{8}{K}$
$195-2.1\left(K\frac{l}{b}-8\right):\frac{8}{K}<\frac{l}{b}\leqq 27$</td><td>$245:\frac{l}{b}\leqq\frac{9}{K}$
$245-3.1\left(K\frac{l}{b}-9\right):\frac{9}{K}<\frac{l}{b}\leqq 25$</td></tr>
<tr><td>75をこえ100以下</td><td>$190:\frac{l}{b}\leqq\frac{8}{K}$
$190-2.0\left(K\frac{l}{b}-8\right):\frac{8}{K}<\frac{l}{b}\leqq 27$</td><td>$240:\frac{l}{b}\leqq\frac{9}{K}$
$240-3.0\left(K\frac{l}{b}-9\right):\frac{9}{K}<\frac{l}{b}\leqq 25$</td></tr>
<tr><td>備　考</td><td colspan="5">A_w：腹板の総断面積(mm^2)
A_c：圧縮フランジの総断面積(mm^2)
l　：圧縮フランジの固定点間距離(mm)
b　：圧縮フランジ幅(mm)
$K=\sqrt{3+\frac{A_w}{2A_c}}$</td></tr>
</table>

1.13　許容応力度の割増しについて

道路橋示方書・同解説では 3 章で許容応力度の割増しについて記載されている．一般的には以下のような規定となっている（日本道路協会，2002；土木学会，1987)．

（1） 許容応力度は 3.2 鋼材の許容応力度に規定する値とする．JIS 材における許容応力度は，材料の基準降伏点に対して 1.7 を見込んだ値としており，材料強度が高くなるにしたがって，引張強さと降伏点との比が小さくなることを考慮して，安全率を若干高めとしている．

（2） この 3.2 に規定しない材料の応力度は，材料の機械的性質や強度のばらつき等を踏まえ，(1) に規定する材料の許容応力度と同等以上の安全度を持つように設定しなければならない．

（3） 板厚が 40 ㎜をこえ板厚により降伏点又は耐力が変化しないことを保証された鋼材の許容応力度に, それぞれの鋼種の 40 ㎜以下の板厚に対して規定する場合には(2)を満足するとみなしてよい．

（4） 鋼橋の設計に用いる許容応力度等は, 荷重の組み合わせに応じて表 2[表-3.3.1] に示す割増係数を乗じた値とする．

（5） 施工時荷重として施工時の風荷重又は地震の影響を考慮する場合の割増係数は表 2[表-3.3.1]の値にかかわらず，架橋地点の条件，施工中の構造系等を考慮して，適切に定めなければならない．

3.2 鋼材の許容応力度，3．2．1 の構造用鋼材の許容応力度の割増しについての記載は表 2 のとおりである．[表-3．3．1 以外にはここでは割愛するが道路橋示方書に準拠されたし(日本道路協会，2002)．ただし，例として許容軸方向応力度及び許容曲げ引張応力度については下記のように，表-解 3．2．1：基準降伏点及び安全率が例示されている．3 章許容応力

度(日本道路協会，2002)]

表 2　許容応力度の割増係数[3．2．1 の構造用鋼材の許容応力度の割増し(日本道路協会 2002)]

表-3.3.1　許容応力度の割増し係数

荷重の組合せ	割増し係数
(1) 主荷重(P)＋主荷重に相当する特殊荷重(PP)	1.00
(2) 主荷重(P)＋主荷重に相当する特殊荷重(PP)＋温度変化の影響(T)	1.15
(3) 主荷重(P)＋主荷重に相当する特殊荷重(PP)＋風荷重(W)	1.25
(4) 主荷重(P)＋主荷重に相当する特殊荷重(PP)＋温度変化の影響(T)＋風荷重(W)	1.35
(5) 主荷重(P)＋主荷重に相当する特殊荷重(PP)＋制動荷重(BK)	1.25
(6) 主荷重(P)＋主荷重に相当する特殊荷重(PP)＋衝突荷重(CO)	
鋼部材に対して	1.70
鉄筋コンクリート部材に対して	1.50
(7) 活荷重及び衝撃以外の主荷重＋地震の影響(EQ)	1.50
(8) 風荷重(W)	1.20
(9) 制動荷重(BK)	1.20
(10) 施工時荷重(ER)	1.25

表-解 3.2.1　基準降伏点及び安全率

鋼種	SS400 SM400 SMA400W		SM490		SM490Y SM520 SMA490W			SM570 SMA570W		
鋼材の板厚 (mm)	40以下	40をこえ100以下	40以下	40をこえ100以下	40以下	40をこえ75以下	75をこえ100以下	40以下	40をこえ75以下	75をこえ100以下
基準降伏点 (N/mm^2)	235	215	315	295	355	335	325	450	430	420
許容軸方向引張応力度 (N/mm^2)	140	125	185	175	210	195	190	255	245	240
安全率	1.68	1.72	1.70	1.69	1.69	1.72	1.71	1.76	1.76	1.75

1.14 破壊確率の復習

図 35 に示されたレベルⅠ設計法はレベルⅡあるいはレベルⅢによる信頼性設計法の計算結果を踏まえてキャリブレーションを施した安全係数（荷重係数および抵抗係数：材料強度係数，構造物係数等）を用いて安全性を確保するやり方である．ここで重要なのは統計的バラツキを有する荷重 F と構造物の強度 f の 2 つの概念である．当然ではあるが，荷重 F は強度 f を超えることは許されない．さもなければ損傷を受けたり，破壊し構造物は存在しなくなることだってある．荷重や強度は本質的にバラツキをもって変動するものである．したがって荷重を強度に比較して十分に小さく見積もっていても思わぬ統計的バラツキによって両者がギリギリに接近したり，あるいは逆転することもあるので怖い．このため統計

的バラツキを考慮して荷重と強度の両者を十分にかけ離すことが行われる．

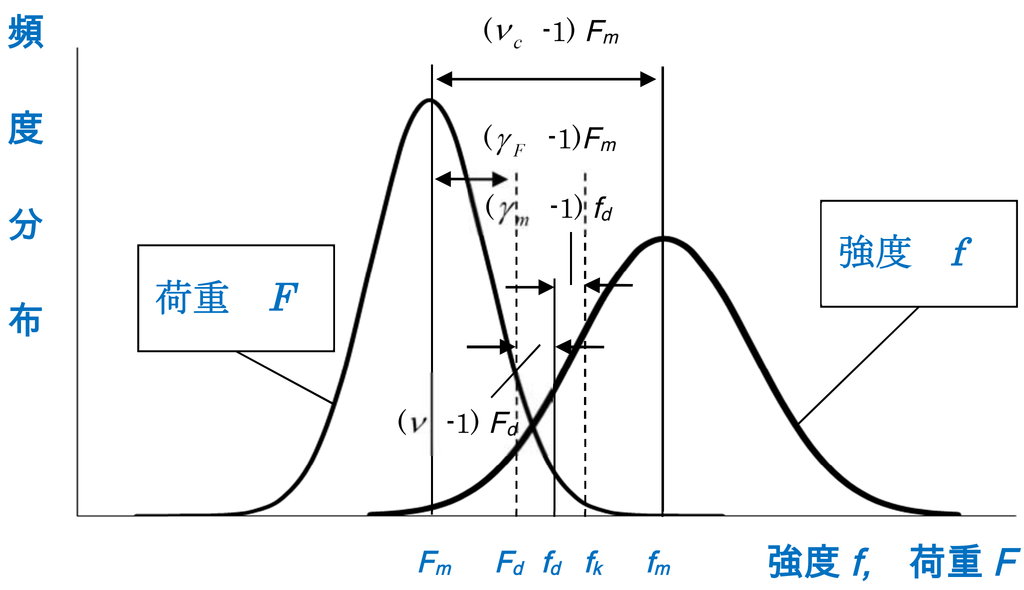


図 35　安全係数(安全率，中央安全率，荷重係数，抵抗係数=材料強度係数，構造物係数等)を用いて安全性を評価する手法　　レベルⅠ設計法(安全係数による設計法)

荷重と強度は統計量であり，荷重の統計値は偏に観測によって計測されねばならないし，強度の統計値については実験（できれば実物大）によって把握するしかない．その観測や実験の統計量を分析して期待値（平均値）ならびに標準偏差を決定することになる．そのようにして得られた期待値を $\boldsymbol{F_m}$ および $\boldsymbol{f_m}$ とする．荷重については期待値 F_m をそのまま荷重特性値とし，強度 $\boldsymbol{f_m}$ については例えば定められた材料強度試験法による統計的バラツキを想定した上で，試験値がそれを下回る確率（非超過確率という）がある一定値（例えば 5%）以下の強度の値を強度の特性値 f_k と見なすことがよく行われる．（正規分布を仮定すると 5%非超過確率を想定して：$\boldsymbol{f_k = f_m\ (1 - kV_f) : k{=}1.64}$）．ここに，材料強度の標準偏差を $\boldsymbol{\sigma_f}$，その変動係数を $\boldsymbol{V_f\ ({=}\sigma_f/f_m)}$ とする．

このようにして，$\boldsymbol{F_m}$ および $\boldsymbol{f_k}$ の値を特性値として設計荷重を式 $\boldsymbol{F_d = F_m \gamma_F}$ により，また設計材料強度を式 $\boldsymbol{f_d = f_k/\gamma_m}$ により決定する．そのとき安全性の余裕としての抵抗係数 $\boldsymbol{\gamma_f}$ および荷重係数 $\boldsymbol{\gamma_F}$ はそれぞれ，1 以上の大きな値を与えて設定することが多い．

そして設計荷重 F_d と設計強度 f_d の比である安全率は $\nu = \boldsymbol{f_d/F_d}$ として設定する．この安全率は中央安全率といわれる値 $\nu_c = \boldsymbol{f_m/F_m}$ とは全く異なることに注目せねばならない．このような係数の γ_F，γ_m，ν を如何に合理的に決定するかは重要である．このうち，荷重係数 γ_F は荷重の特性値からの望ましくない方向への変動，荷重の算出方法の不確実性，荷重特性が限界状態に及ぼす影響，環境作用の変化等を考慮するための安全係数であり，その値は例えば表 3 のとおりである（鋼・コンクリート，1992）．また，材料係数 γ_m は材料強

度の特性値からの望ましくない方向への変動，供試体と構造物中との材料特性の差異，材料特性が限界状態に及ぼす影響，材料特性の経時変化を考慮するための安全係数であり，表 4 にその値の例を示す(鋼・コンクリート，1992).

表 3 荷重係数 γ_F (鋼・コンクリート, 1992)

限界状態	荷重の種類	荷重係数 γ_F
終局限界状態	永久荷重	1.0～1.2 または 1.0～0.8 (小さい方が不利なとき)
	主たる変動荷重	1.1～1.2
	従たる変動荷重	1.0
	偶発荷重	1.0
使用限界状態	すべての荷重	1.0
疲労限界状態	すべての荷重	1.0

表 4 材料係数 γ_m (鋼・コンクリート, 1992)

材料の種類	限界状態	材料係数 γ_m	
鋼材 $(m=s)$	終局限界状態	γ_s	1.0～1.05
	使用限界状態		1.0
	疲労限界状態		1.0～1.05
コンクリート $(m=c)$	終局限界状態	γ_c	1.3
	使用限界状態		1.0
	疲労限界状態		1.3

1.15　許容応力度の割増しによる破壊確率の変化

さて，荷重ならびに材料の強度のそれぞれが正規確率分布すると仮定するとして許容応力が割増された場合の破壊確率を求めてみよう．表 5 および表 6 に示されているように, i) 荷重の変動係数 V_Fが 0.1, 材料係数の変動係数 V_fが 0.05 ならびに ii)荷重の変動係数 V_Fが 0.2, 材料係数 V_fの変動係数が 0.1 のそれぞれに対して破壊確率を理念的には計算することが可能である．これらの表は文献(渡邊，2011)に追加して許容応力の割増の影響をも考慮している．また，安全率としては 0.4～1.8 をカバーしている．安全率が 0.4 というのは理解に苦しむような低い値であるが，参考のための数値と考えて頂きたい．これらの表では破壊確率の他，安全率（設計抵抗強度 f_dを許容応力F_dで除したもの)，中央安全率（抵抗強度の平均値 f_mを許容応力の平均値 F_mで除したものと解釈)，信頼性指数(β)，標準正規確率分布値($\Phi(\beta)$)の値が示してある．

安全率が 1.7 の場合については, i）荷重係数(γ_F)×材料係数(γ_m)=1.0 の場合では破壊確率は 0.0～0.000145，ii）荷重係数(γ_F)×材料係数(γ_m)=1.2 の場合では破壊確率(P_f=1-Φ(β))は 0.0～0.0000025 程度となることが類推される．しかし，安全率が 1.7 よりかなり小さな場合，すなわち表 2 の中で許容応力度の割増係数が大きい場合，例えば(6)主荷重(P)+主荷重に相当する特殊荷重(PP)＋衝突荷重(CO)のような荷重の組み合わせの場合は鋼，コンクリート(安全率も 3.0 で大きいし，終局限界状態では材料係数は 1.3 となり，鋼の 1.0～1.05 よりは大きいので心配はしなくて良く，そのため，ここでは特に言及しないが)鋼，コンクリートのそれぞれの部材に対して割増係数が 1.7，1.5 と大きな場合は破壊確率が大きくなるので要検討となる．

表 5 安全率 ν，中央安全率 ν_c，信頼性指標 β および破壊確率 P_f の値（渡邊，2011）

k=1.64 (非超過確率 5%) のとき (正規分布を仮定：γ_m・γ_F=1.0 のとき)

V_F	V_f	ν	ν_c	β	Φ(β)	P_f=1-Φ(β)
0.1	0.05	**1.0**	1.089	**0.78**	0.7836	**0.2164**
		1.1	1.198	1.70	0.9555	0.0445
		1.13	1.231	**1.97**	0.9754	**0.0246**
		1.2	1.307	2.57	0.9949	0.0051
		1.3	1.416	3.40	0.9997	0.0003
		1.4	1.525	4.18	0.999985	0.000015
		1.5	1.634	4.91	0.99999954	0.00000046
		1.6	1.743	5.60	0.999999989	0.0000000107
		1.7	1.852	**6.25**	0.9999999999	**0.0000000002**
		1.8	1.961	6.86	0.9999999999	0.0000000000
0.2	0.1	**1.0**	1.196	**0.84**	0.8000	**0.2000**
		1.1	1.316	1.32	0.9064	0.0936
		1.13	1.352	**1.46**	0.9274	**0.0726**
		1.2	1.435	1.77	0.962	0.0385
		1.3	1.555	2.19	0.986	0.0142
		1.4	1.675	2.59	0.9951	0.00485
		1.5	1.794	2.96	0.9984	0.00156
		1.6	1.914	3.30	0.99952	0.000481
		1.7	2.033	**3.62**	0.99985	**0.000145**
		1.8	2.153	3.92	0.999956	0.0000436
		1.9	2.273	4.20	0.9999778	0.0000222

表 6 安全率・，中央安全率 ν_c，信頼性指標 β および破壊確率 P_f の値（渡邊，2011）

k=1.64(非超過確率 5%)のとき（正規分布を仮定：γ_m・γ_F=1.2 のとき）

V_F	V_f	ν	ν_c	β	$\Phi(\beta)$	P_f=1-$\Phi(\beta)$
0.1	0.05	**1.0**	1.307	**2.57**	0.9949	**0.0051**
		1.1	1.438	3.56	0.99981	0.000189
		1.13	1.477	**3.84**	0.999938	**0.0000620**
		1.2	1.569	4.47	0.9999962	0.00000383
		1.3	1.699	5.33	0.999999951	0.0000000494
		1.4	1.830	6.12	0.999999999	0.0000000000
		1.5	1.961	6.86	0.9999999999	0.0000000000
		1.6	2.092	7.54	0.9999999999	0.0000000000
		1.7	2.222	8.18	0.9999999999	**0.0000000000**
		1.8	2.353	8.76	0.9999999999	0.0000000000
0.2	0.1	**1.0**	1.435	**1.77**	0.9615	**0.0385**
		1.1	1.579	2.27	0.9884	0.01154
		1.13	1.622	**2.42**	0.99214	**0.007856**
		1.2	1.722	2.74	0.996902	0.0030981
		1.3	1.866	3.17	0.99922739	0.000772613
		1.4	2.010	3.56	0.999815123	0.000184877
		1.5	2.153	3.92	0.999956418	0.0000435824
		1.6	2.297	4.26	0.999989666	0.0000103339
		1.7	2.440	**4.56**	0.999997496	**0.00000250385**
		1.8	2.584	4.85	0.999999373	0.000000627171

ちなみに鋼部材の場合は安全率（ν）は 1.7÷ 1.7 = 1.0であるから図 36 及び表 5（荷重係数×材料係数=1.0 の場合）を参照して破壊確率［P_f = 1-$\Phi(\beta)$]は 0.200（V_F =0.2; V_f =0.1; β = 0.84)～0.216 (V_F=0.1; V_f=0.05; β = 0.78), 図 37 及び表 6 (荷重係数×材料係数=1.2 の場合）を参照して破壊確率は 0.0051 (V_F=0.1; V_f=0.05; β = 2.57)～0.0385(V_F=0.2; V_f=0.1; β = 1.77)となることが推測される.

さらに，(7)活荷重及び衝撃以外の活荷重＋地震の影響(EQ)については割増係数が 1.5 となるからその場合の安全率は 1.7÷ 1.5＝1.13 となり，図 36 及び表 5（荷重係数×材料係数=1.0 の場合）を参照して， 破壊確率[P_f= 1-$\Phi(\beta)$] は 0.0246(V_F=0.1; V_f=0.05; β = 1.97)～0.0726(V_F=0.2; V_f=0.1; β = 1.46)，図 37 及び表 6 を参照して， 破壊確率[P_f= 1-$\Phi(\beta)$] は 0.000062(V_F=0.1; V_f=0.05; β = 3.84)～0.00786(V_F=0.2; V_f=0.1; β = 2.42)となることが推測される.

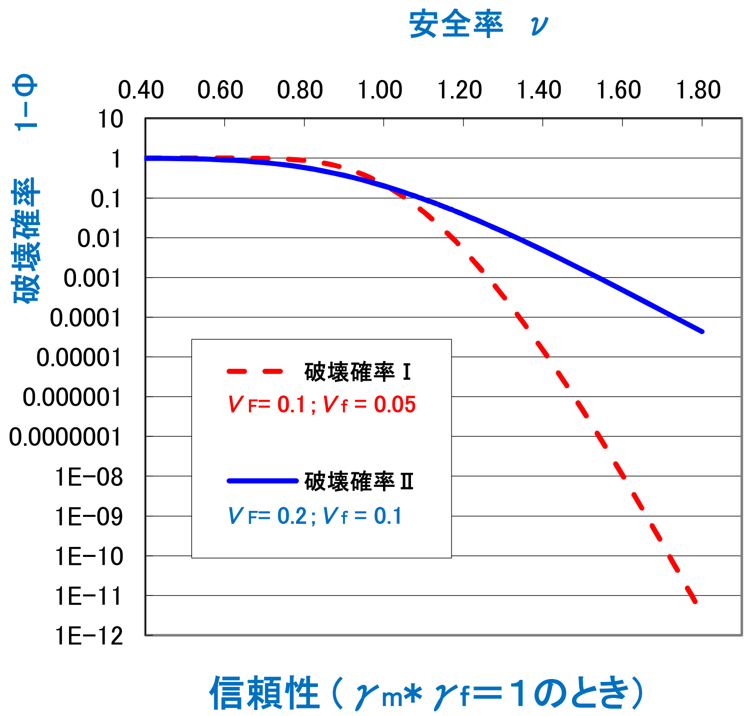


図 36　安全率 ν と破壊確率[$P_f = 1\text{-}\Phi(\beta)$]の値

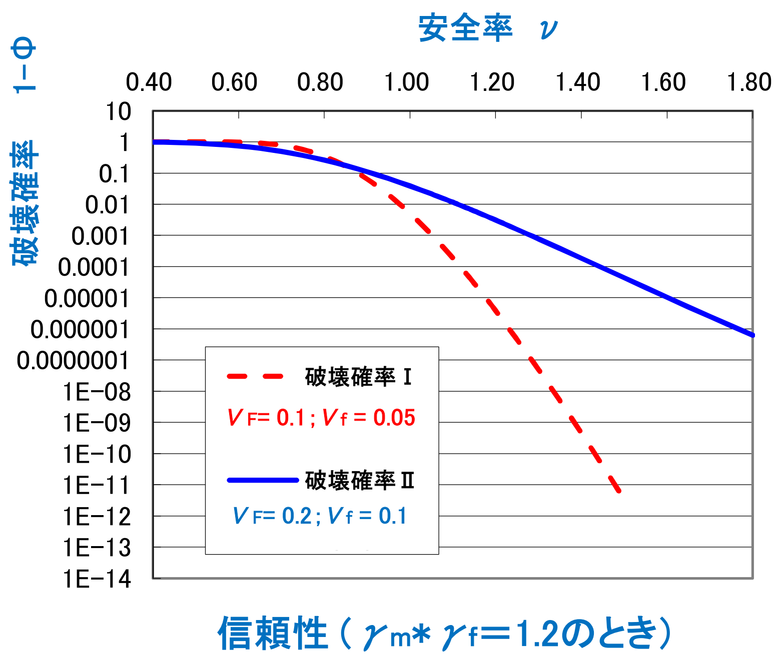


図 37　安全率 ν と破壊確率[$P_f = 1\text{-}\Phi(\beta)$]の値

1.16　むすび

この資料では橋梁の設計において基本と考えられる，鋼柱・はりの座屈設計のための基本的事項について一部を復習した．特に座屈荷重の算定法，初期不整，残留応力の他降伏並びに塑性変形についても触れた．そして外力荷重の作用下で座屈などによって支配される場合の部材の設計許容応力に着目し，材料および荷重の統計分布が正規確率分布に従うと仮定し，**設計材料強度と許容応力荷重の変動係数（V_f及び V_F）（現示方書では未規定）**ならびに，**荷重係数と強度係数（γ_F及びγ_f）**を仮定**（現示方書では未規定）**して道路橋示方書の規定に従ったときの破壊確率を前述の未既定の材料強度，荷重の変動係数（V_f及び V_F）や荷重係数ならびに強度係数（γ_F及びγ_f）を仮定して試算してみた．さらには事象が稀なケースの場合のとき許容応力の割増を考えたときについても同様な試算を行い鋼橋の信頼性について考察を行った．今後は更に鋼板構造部材の局部座屈などの場合についても同様な考察を行い，より包括的な信頼性の推定を試みたいと考えている．

謝辞

大阪市立大学北田俊行名誉教授と首都大学東京野上邦栄教授には土木学会鋼構造委員会継続教育小委員会の座屈基礎講座としてそれぞれご講演になった貴重な資料を文献としてご提供頂いた．記して謝意を表する次第である．

文献

1) 青木徹彦・福本唀士 : :鋼柱の座屈強度のばらつきに及ぼす残留応力の影響について，土木学会論文報告集, No.201, 31-41, 1972
2) 北田俊行，Ⅰ．座屈の基礎，座屈基礎講座，土木学会鋼構造委員会継続教育小委員会，2006
(http://www.jsce.or.jp/committee/steel/subcomit-active/keizoku/zakutsu01.pdf)
3) 鋼・コンクリート共通構造設計基準小委員会，鋼構造とコンクリート構造の限界状態設計法に関する共通の原則，土木学会論文集 No. 450/I-20, pp.13-20, 1992 年 7 月
4) 土木学会，鋼構造物設計指針　PART A　一般構造物，鋼構造シリーズ　3A，技報堂，東京，1987
5) 日本道路協会，道路橋示方書・同解説　I 共通編　II 鋼橋編，丸善出版，2012
6) 日本道路協会，道路橋示方書・同解説　I 共通編　II 鋼橋編，丸善出版，2002
7) 野上邦栄，道路橋示方書と座屈設計事項，座屈基礎講座，土木学会鋼構造委員会継続教育小委員会，2006
(http://www.jsce.or.jp/committee/steel/subcomit-active/keizoku/zakutsu02.pdf)
8) 福本唀士・伊藤義人，鋼構造部材の耐荷力評価システムのための数値データバンクの作成と利用，土木学会論文報告集，No. 312，pp.59－72，1981
9) 福本唀士・伊藤義人, 座屈実験データベースによる鋼柱の基準強度に関する実証的研究,

土木学会論文報告集，No.335, 1983
10) 福本唀士(編集)，渡邊英一（分担執筆），座屈設計ガイドライン，鋼構造シリーズ 2，座屈設計のガイドライン作成小委員会，土木学会鋼構造委員会，土木学会，技報堂，1987
11) 渡邊英一，橋の安全性・破壊確率について　-津波防波堤の安全性にもふれて-，駒井ハルテック技報，Vol.1, 20-29，2011
12) Fukumoto, Y., Numerical data bank for the ultimate strength of steel structures, U.S. Japan Seminar on Inelastic Instability of Steel Structures and Structural Elements, pp. 44-67, 1981.
13) Itoh, Y., Ultimate strength variations of structural steel members, Doctoral Dissertation, Nagoya University, 1984.
14) Watanabe, Eiichi，A study on the catastrophe and static load-carrying capacity of structures, a dissertation submitted to the Graduate Faculty in partial fulfillment of the requirements for the Degree of Doctor of Engineering, Kyoto University 1985